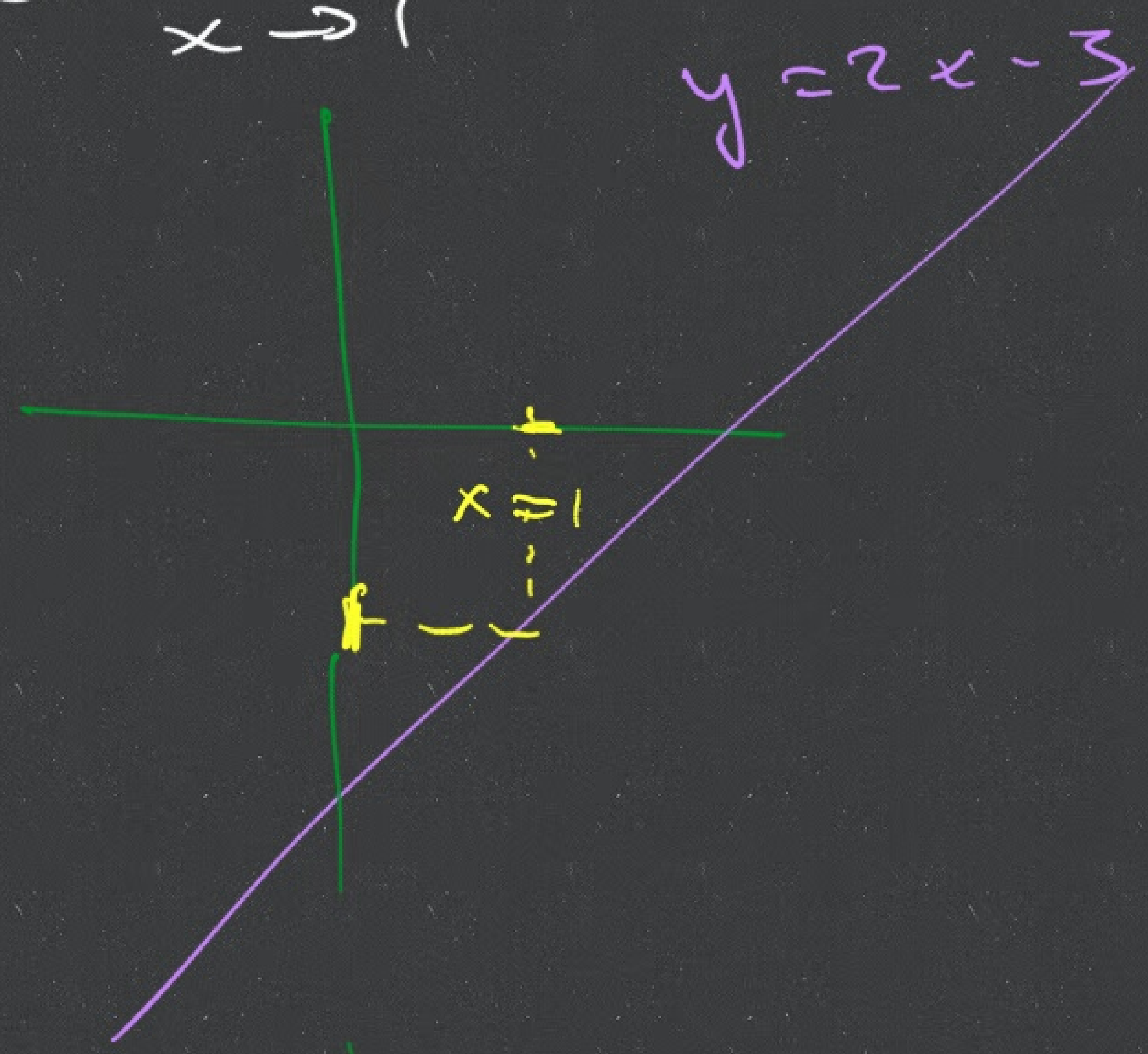
Limieten Informeel betekenis:

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ betekent: "Je kunt $f(x)$ willekeurig dicht bij b krijgen, als je x dicht genoeg bij a kiest"

Voorbeelden

① $\lim_{x \to 1} 2x - 3 = -1$

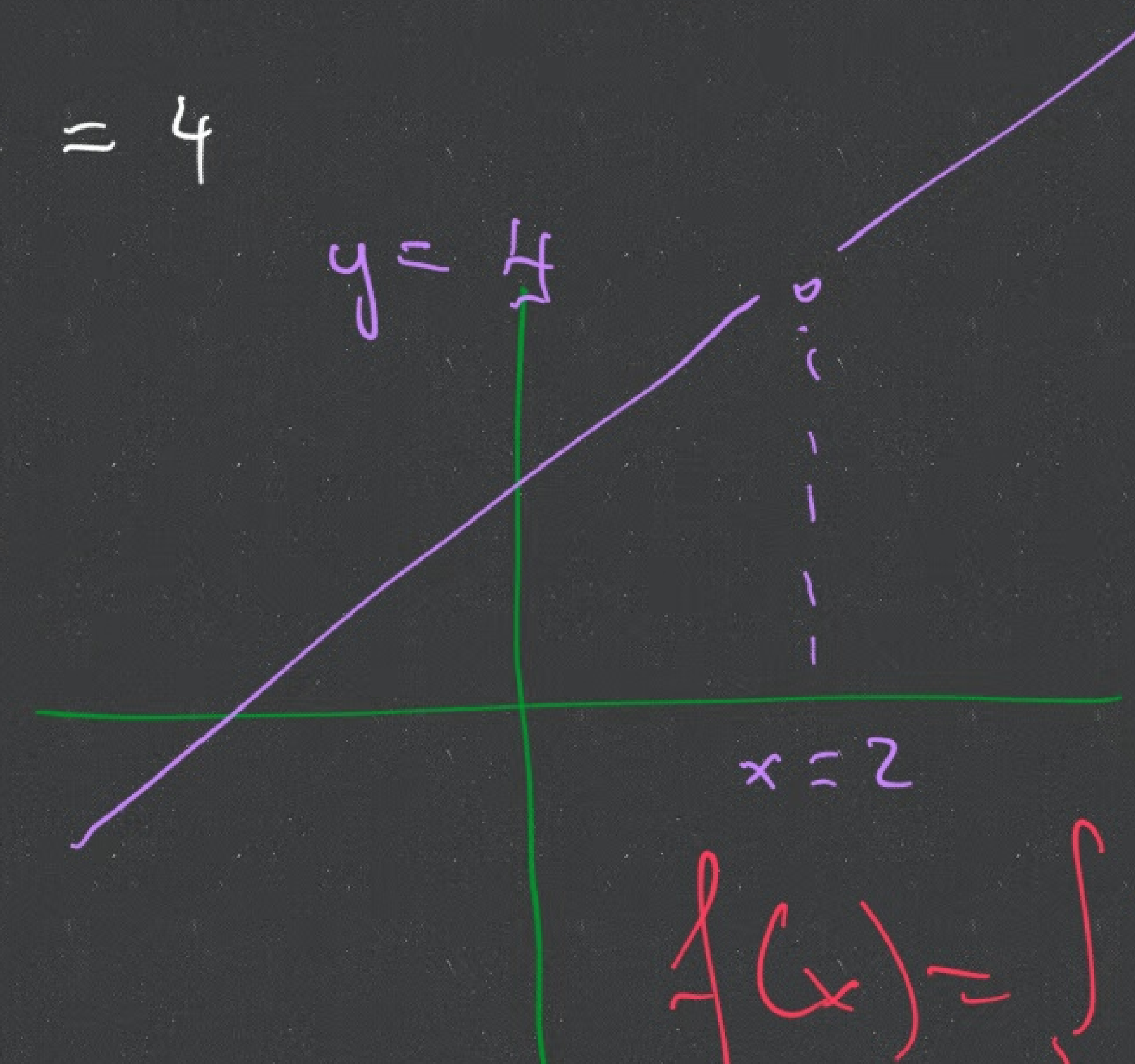


② $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$

NB: $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

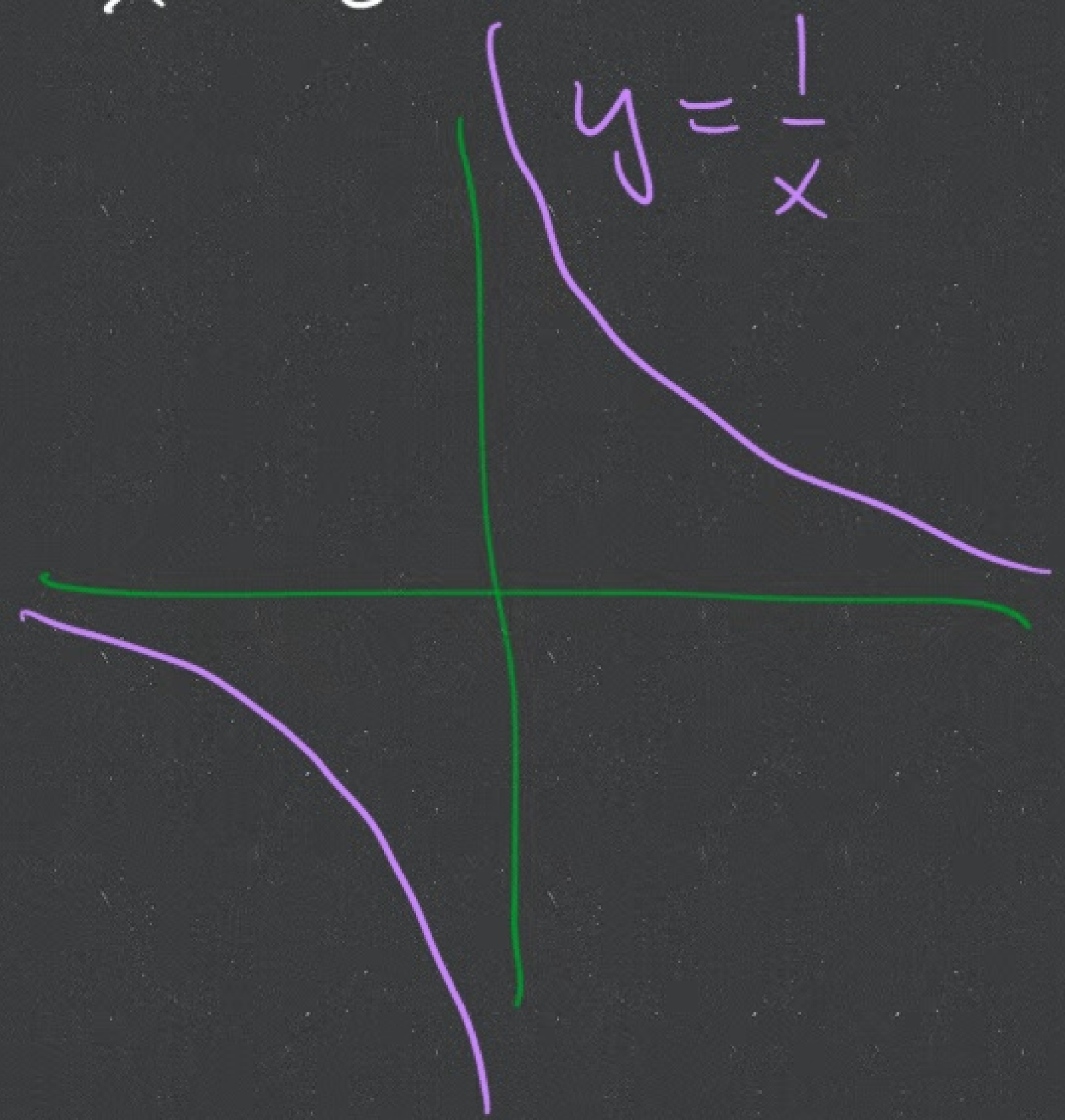
$= x + 2$ mits $x \neq 2$



Definieer f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{als } x \neq 2 \\ 27 & \text{als } x = 2 \end{cases}$$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$



Onderscheid:

Linkerlimiet x komt van links

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Rechterlim x komt van rechts

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

---

④ $$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4} = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\Big|_{x=4}$$

Herinner: we definieerden $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

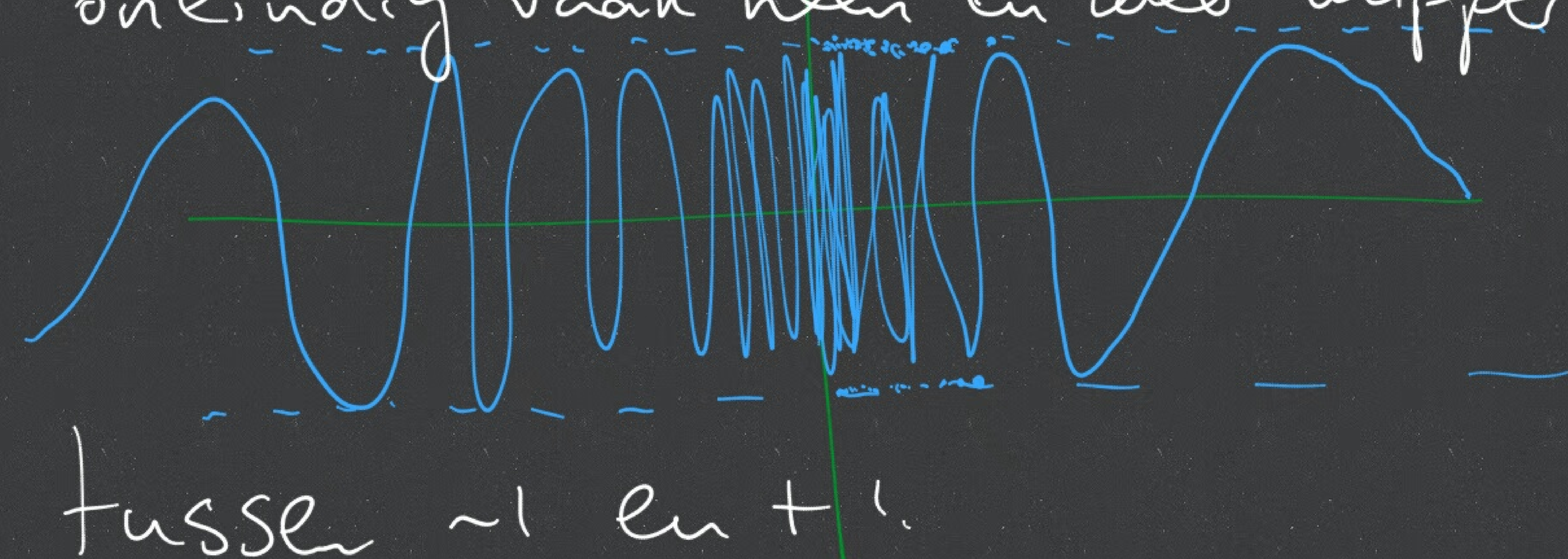
⑤ $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} \left[\frac{0}{0}\right]$ $(-1)^3+1=0$ dwz: $x+1$ is een factor van x^3+1

Wegdelen: $\lim_{x \to -1} x^2-x+1 = 3$

REKENREGELS: (p. 69 + St. 3 p. 70)

⑥ Waarschuwing: $\boxed{\text{lim bestaat niet altijd}}$

VB: $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ bestaat niet omdat $\sin\frac{1}{x}$ in de buurt van $x=0$ oneindig vaak heen en weer wappert



tussen -1 en $+1$.

NOOIT;

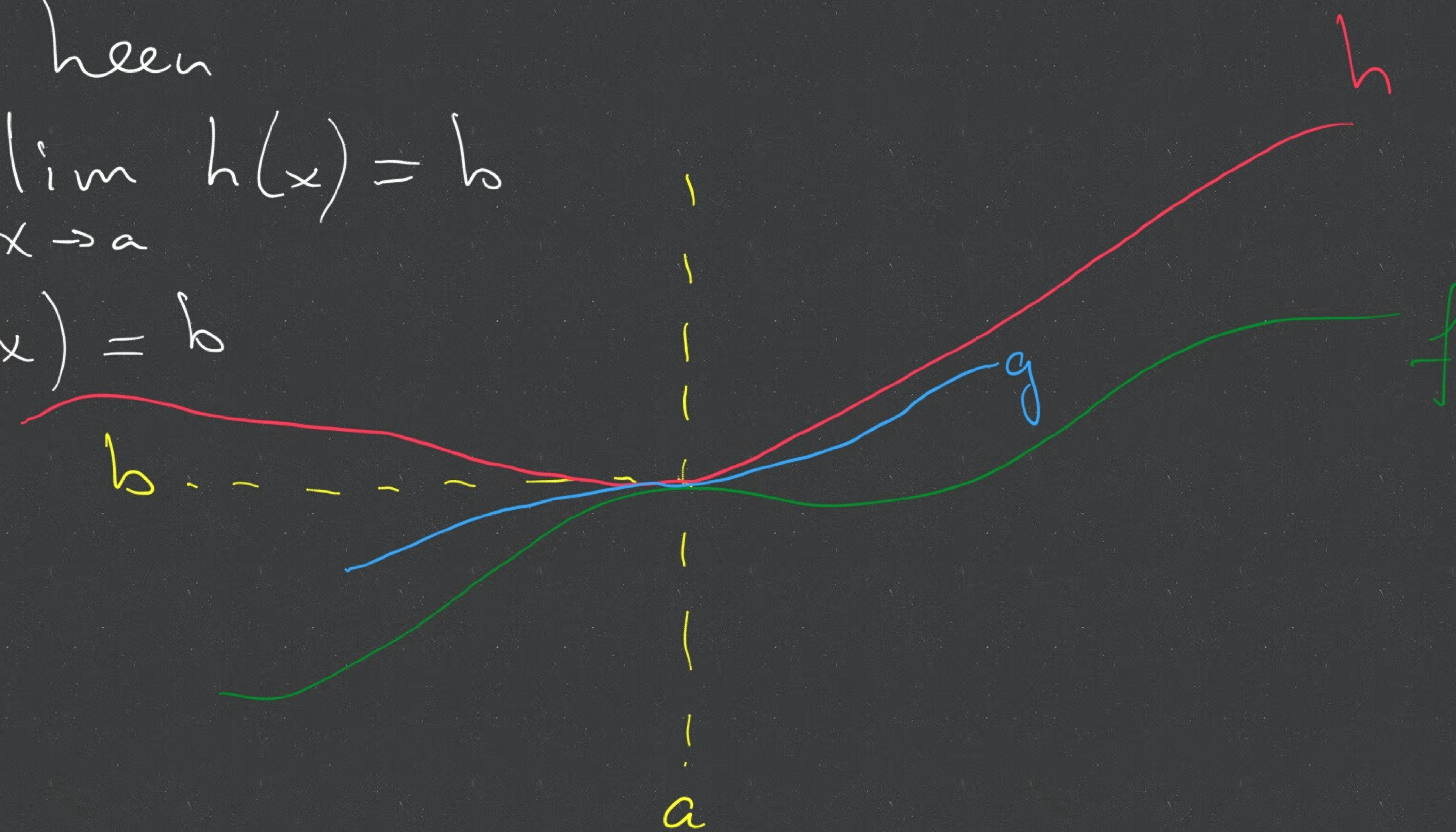
$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} = b$

Insluitstelling ⚠

Als 1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$ voor alle x in een interval om a heen

en 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$

dan is $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$



Vb: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x}$

Merk op: $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq +1$

$$-|x| \leq x \leq +|x|$$

en dus: $-|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$

Insluitstelling toepassen

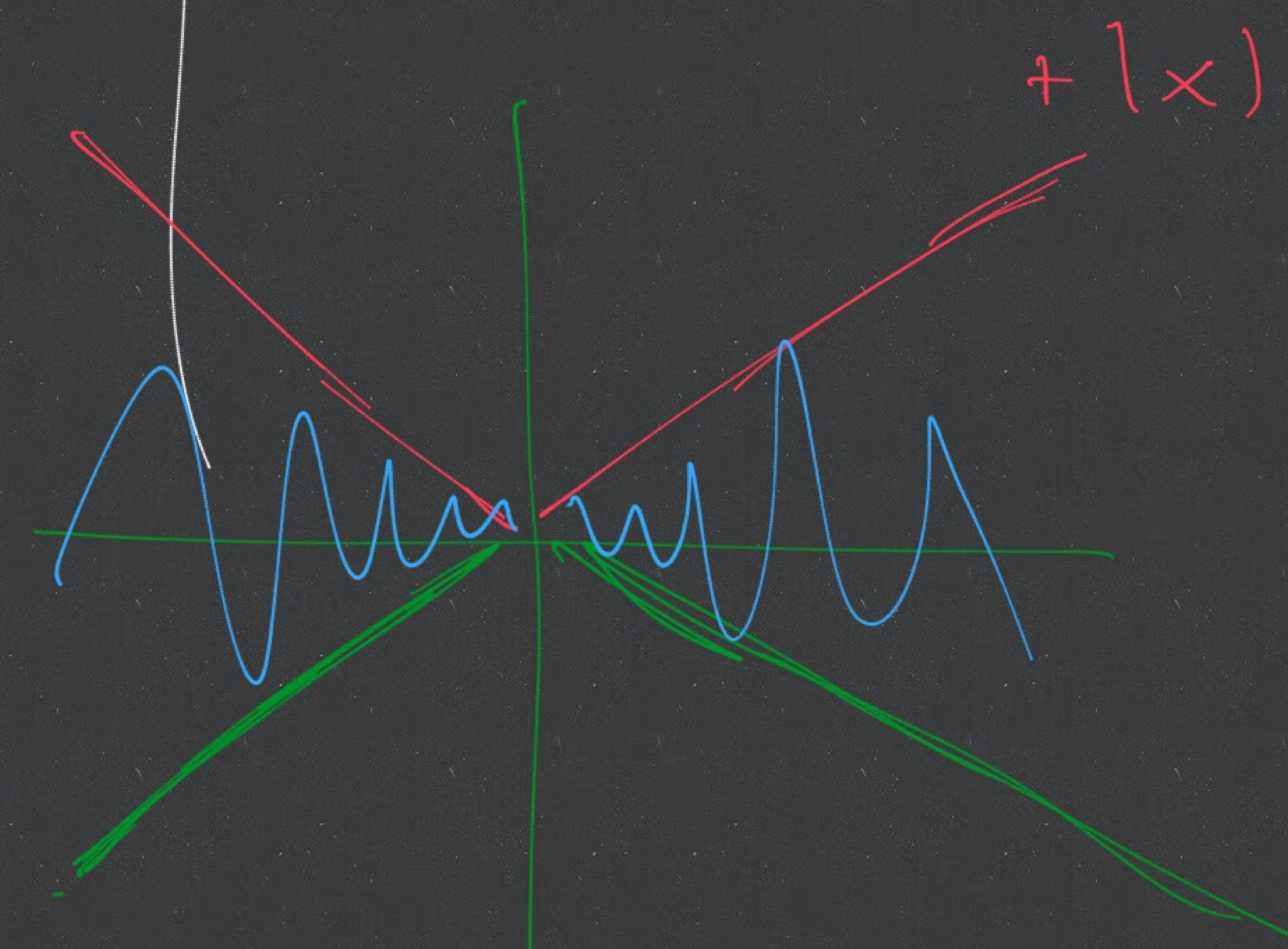
met $f(x) = -|x|$

$g(x) = x \sin\frac{1}{x}$

$h(x) = +|x|$

Herinner

- $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ bestaat niet



Hebben: 1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

Conclusie: $\lim g(x) = 0$

Continuïteit Def:

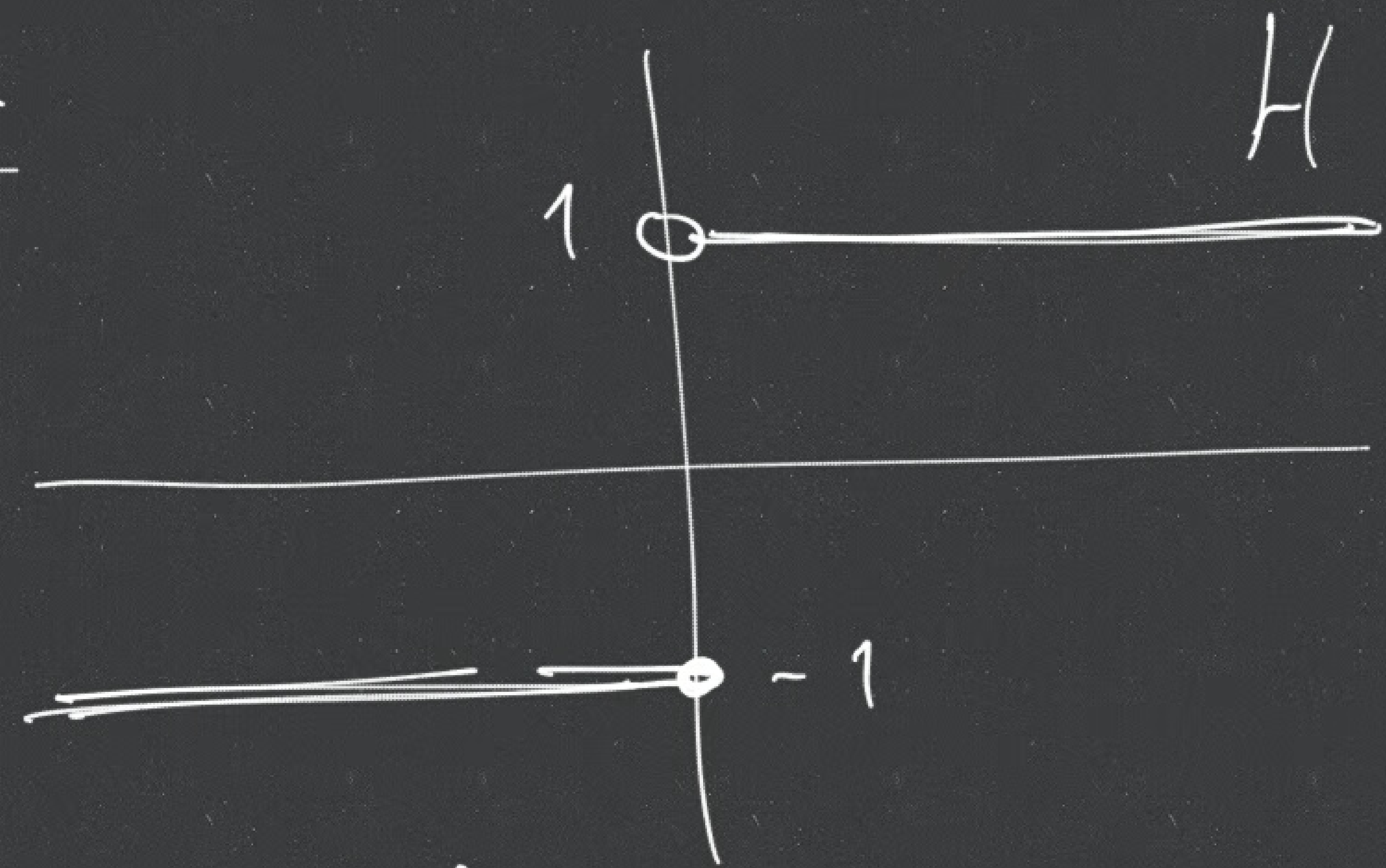
1) f is continu in a indien $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2). f is continu op een verzameling indien
f continu in elk punt van die verzameling.

VB: $f(x) = \frac{1}{x}$ is niet continu op $\mathbb{R}$
wel continu in elk punt $x = a$
mits $a \neq 0$

wel continu op $(\leftarrow, 0)$ en $(0, \rightarrow)$

Vb.



$$H(x) = \begin{cases} -1, & \text{als } x \le 0 \\ +1, & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

(Heaviside)

Zelf nagaan: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \downarrow 0} H(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \uparrow 0} H(x) = -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ bestaat niet

$H(0) = -1$

dus H is niet cont. in 0.

Vb.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{als } x \neq 2 \\ 27 & \text{als } x = 2 \end{cases}$$

niet cont. $x = 2$

want

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

$$f(2) \neq 4$$

Tussenwaardestelling

als f continu is op een gesloten interval $[a, b]$ en

--- morgen verder!