A 2×2 matrix bijvoorbeeld $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dit is de eerste kolom van A

$A\hat{j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en hier de tweede kolom

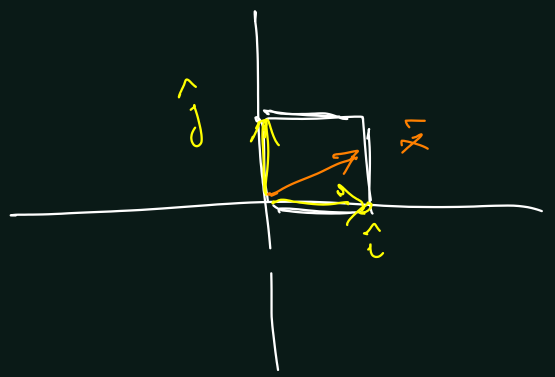
Neem $\bar{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left(7\hat{i} + 8\hat{j}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left(7\hat{i}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\left(8\hat{j}\right) \\
&= 7\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\hat{i} + 8\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\hat{j} \\
&= 7\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 16 \\ 21 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

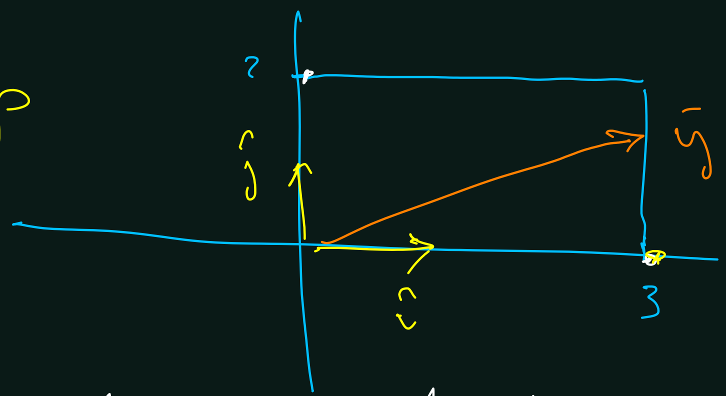
Conclusie

Je kent een matrix volledig als je weet wat hij met de basisvectoren doet.

Gebruiken (algebra $\longleftrightarrow$ meetkunde)



afbeelden op



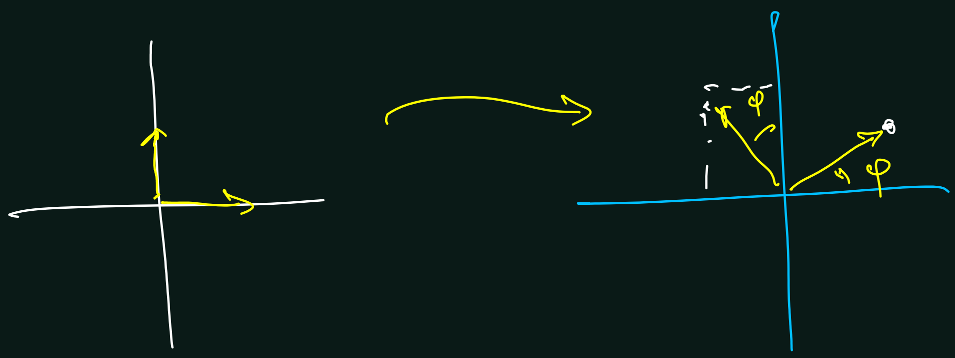
Maw; je wilt elke vector $\bar{x}$ uit linkerplaatje afbeelden op bijbehorende $\bar{y} = A\bar{x}$ uit rechterplaatje met een matrix A. Vraag: bepaal A

Plaatje: $A\hat{i} = 3\hat{i}$ en $A\hat{j} = 2\hat{j}$

Concludeer: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Oftewel: je krijgt een "schaalmatrix" door de schaalfactoren op diag. te zetten

Roteren over hoek φ



$$A\hat{i} = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$A\hat{j} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Conclusie

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Nu geldt voor elke vector $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^2$ dat $A\bar{x}$ over een hoek φ gedraaid is.

Terugdraaien over dezelfde hoek met matrix B

$$B = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

Controleer:

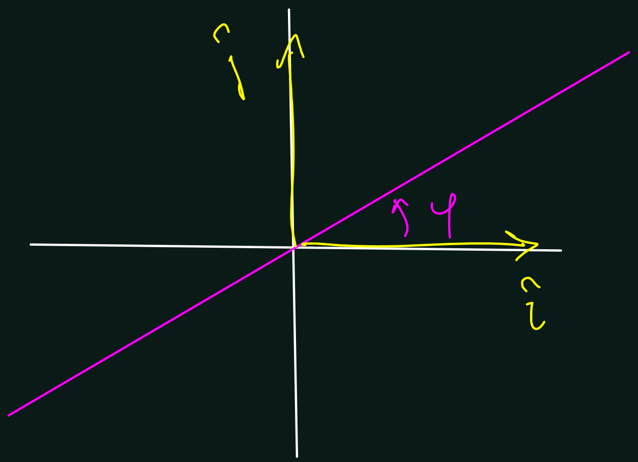
$$BA = I_2$$

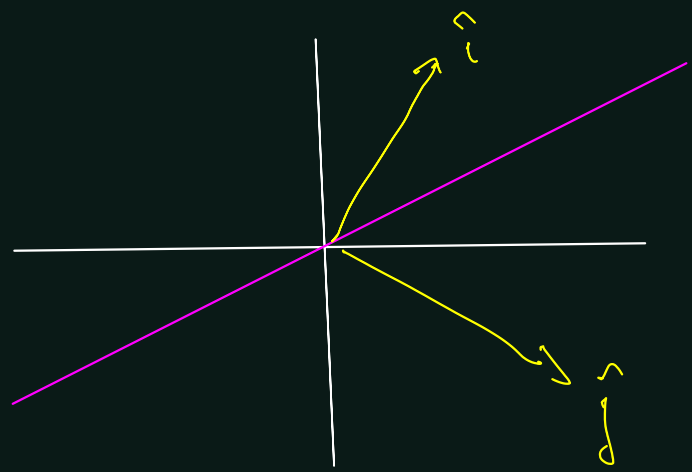
Ha mooi, het klopt

Spiegelen in de x-as

$A\hat{i} = \hat{i}$ en $A\hat{j} = -\hat{j}$ dus $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Spiegelen in een rechte door O die een hoek φ maakt met x-as





Aanpak

1) Draai de lijn over hoek $-\varphi$ zodat die op de x-as ligt $\rightarrow R_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

2) Spiegelen in x-as $\longrightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) Terugdraaien over hoek $+\varphi$ $\quad R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Welke volgorde vermenigvuldigen?

$$\boxed{R_\varphi S R_{-\varphi}}$$

dit is een voorbeeld van conjugeren

$\bar{x}$

$R_{-\varphi}\bar{x}$

$R_\varphi S R_{-\varphi}\bar{x}$ is de juiste spiegeling.

$R_{-\varphi} S R_\varphi$ is spiegelen in lijn met hoek $-\varphi$.

Inverse matrix

Stel vierkante matrix A $(n \times n)$

Wat we verstaan onder de inverse van A, notatie A^{-1}, is een matrix A^{-1} waarvoor geldt dat $A^{-1}A = I = AA^{-1}$

Voorbeelden

$I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $I_2^{-1} = I_2$ want $I_2 I_2 = I_2$

Spiegelmatrix

$S = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ inverse $S^{-1} = S$, want $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = I_2$

Roteren

$R_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ $R_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

Ander voorbeeld.

$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ heeft inverse $\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

Nog een

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ oh nee! die heeft geen inverse.

$\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}$ en $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

NIET ELKE MATRIX HEEFT EEN INVERSE