① Matrix A; als A^{-1} bestaat, hoe vind je 'em dan → Recept

② Hoe weet je óf A^{-1} bestaat → Determinant

Voorbeeldmatrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Antw ①

<u>Gedachte:</u> je zoekt A^{-1} met eigenschap $AA^{-1} = I$

Noem de kolommen van A^{-1} $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$

Dan moet gelden: $\underbrace{A\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{stelsel}}$, $A\bar{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

stelsel
gevr: opl. voor $\bar{p}$ — idem $\bar{q}$ — idem $\bar{r}$

Om deze 3 stelsels in één keer op te lossen doe je

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{VEGEN}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 & q_2 & r_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 & q_3 & r_3 \end{array}\right)$$

<u>OKEE LETS GO:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

A^{-1}

Conclusie: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

Check: controleer of $AA^{-1} = I$

VB: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Vind de inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & -3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

GAAT NIET LUKKEN

RECEPT FAALT

B^{-1} BESTAAT NIET

Meetkundige betekenis

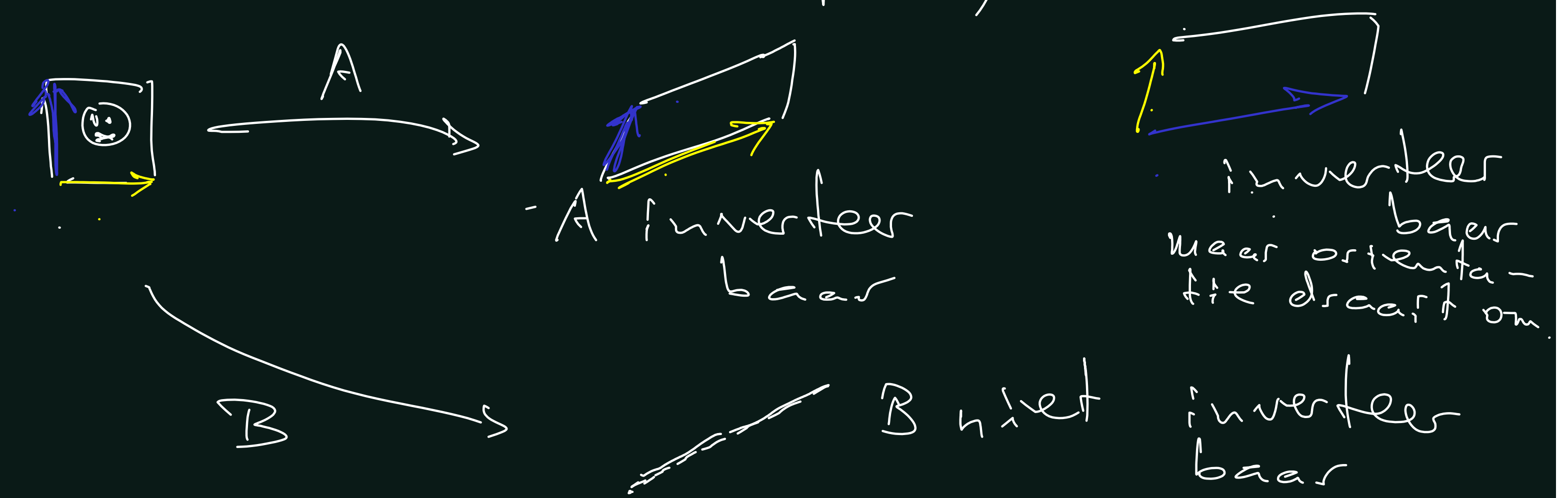
Het niet-inverteerbaar zijn van een vierkante matrix is een signaal dat die matrix meetkundig gezien iets niet-omkeerbaars doet

OF ANDERS:

... dat de matrix dingen in $\mathbb{R}^n$ afbeeldt op een lagere dimensie.

Bijv. (denk aan donald/lenna/piet)

in $\mathbb{R}^2$:



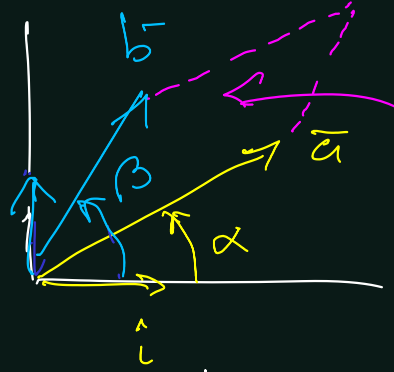
Determinant: we gaan een getal invoeren dat ons vertelt ① hoe groot is het beeld van een eenheidsvierkantje

② is de oriëntatie behouden (+) of juist omgekeerd (−).

In $\mathbb{R}^2$ neem matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$\bar a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A\hat i$$

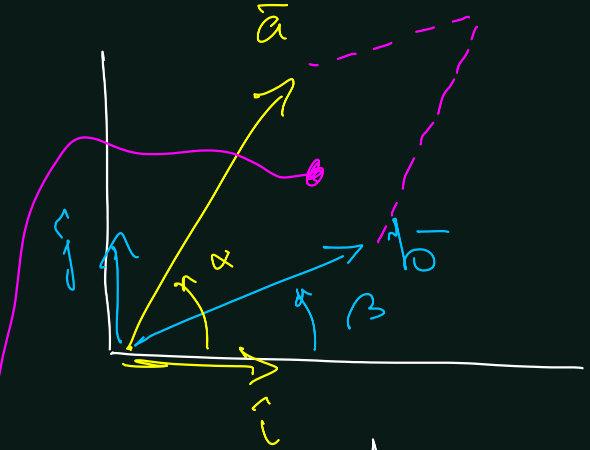
$$\bar b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A\hat j$$



oriëntatie is behouden

Opp

$|\bar a|\,|\bar b|\sin(\beta-\alpha)$



oriëntatie is omgekeerd.

Opp:

$|\bar a|\,|\bar b|\sin(\alpha-\beta)$

$|\bar a|\,|\bar b|\sin(\beta-\alpha)$

Als determinant $|\bar a|\,|\bar b|\sin(\beta-\alpha)$ willen we

Hee, da's hetzelfde

Alleen, dit rekent niet zo fijn.

$$\frac{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\beta-\alpha)}{} \quad \| \quad \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{}$$

Gebruik

① $\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

② $|\vec{a}|\cos\alpha = a_1 \qquad |\vec{b}|\cos\beta = b_1$

$|\vec{a}|\sin\alpha = a_2 \qquad |\vec{b}|\sin\beta = b_2$

Conclusie voor de matrix $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ is

de determinant $a_1 b_2 - b_1 a_2$

Nota Bene: als determinant nul, dan is de matrix niet inverteerbaar

Notatie: $\det(A) = |A|$

Voorbeeld: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = 0$$

In $\mathbb{R}^3$: zelfde principe, "georienteerd volume"

det is volume en orientatie van dit ding

Stel $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ Het blijkt dat

$$\det(A) = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

en vele andere manieren.

In $\mathbb{R}^n$: zelfde principe, behandelen we niet.

Eigenschappen: (1) A^{-1} bestaat dan en slechts dan als $\det A \neq 0$

(2) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(3) $\det(I) = 1$

$\Big\} \rightarrow \det(A^{-1})$?

$$I = A^{-1}A$$

$$\det(I) = \det(A^{-1}A)$$

$$= \det(A^{-1})\det(A)$$

$$1 = \det(A^{-1})\det(A)$$

dus

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$