n = 59
− = 11
o = 18
+ = 30

Partieel differentiëren

$f(x,y,z)$ diff naar x, houd y en z constant

formeel: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} = f_1(x,y,z)$

≙ diff naar 1e variabele
Partiële afgeleide van f naar x

Notaties:

$$\partial_x f = \partial_1 f = D_x f$$

$$= f_x = f_1 = D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial u}{\partial x}$$

als $u = f(x,y,z)$

Kromme ∂ altijd gebruiken voor partieel diff.

Tweede variabele:

$$f_y = f_2 = D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_2 f = \frac{\partial}{\partial y} f = D_y f$$

$$\partial_2 f = \partial_y f$$

Ambigu: $\frac{\partial}{\partial x} f(x^2, xy)$

(1) Diff f naar 1e variabele en vul daarna x^2, xy in

(2) Neem $g(x,y) = f(x^2, xy)$ en diff g naar zijn eerste variabele.

Voorbeeld: $f(p,q) = q^2(1+3p)$

① $\partial_1 f = 3q^2$ nu invullen $\rightarrow$ $\partial_1 f(x^2, xy) = 3x^2y^2$

② $g(x,y) = x^2y^2(1+3x^2)$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy^2(1+3x^2) + x^2y^2(6x)$

Niet hetzelfde!

Voorbeelden: $z(x,y) = e^{xy}\sin(x-y)$

Partieel diff:

$\frac{\partial z}{\partial x} = z_1 = ye^{xy}\sin(x-y) + e^{xy}\cos(x-y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = z_2 = xe^{xy}\sin(x-y) - e^{xy}\cos(x-y)$

Nog een Stel $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff baar

en $z(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

dan $z_1(x,y) = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$ $\rightarrow$ $\frac{x}{y}$ diff naar x

en $z_2(x,y) = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$ $\frac{x}{y}$ gediff naar y

$$\boxed{x z_1 + y z_2} = f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} - f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{x}{y} = 0$$

Nieuw begrip

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

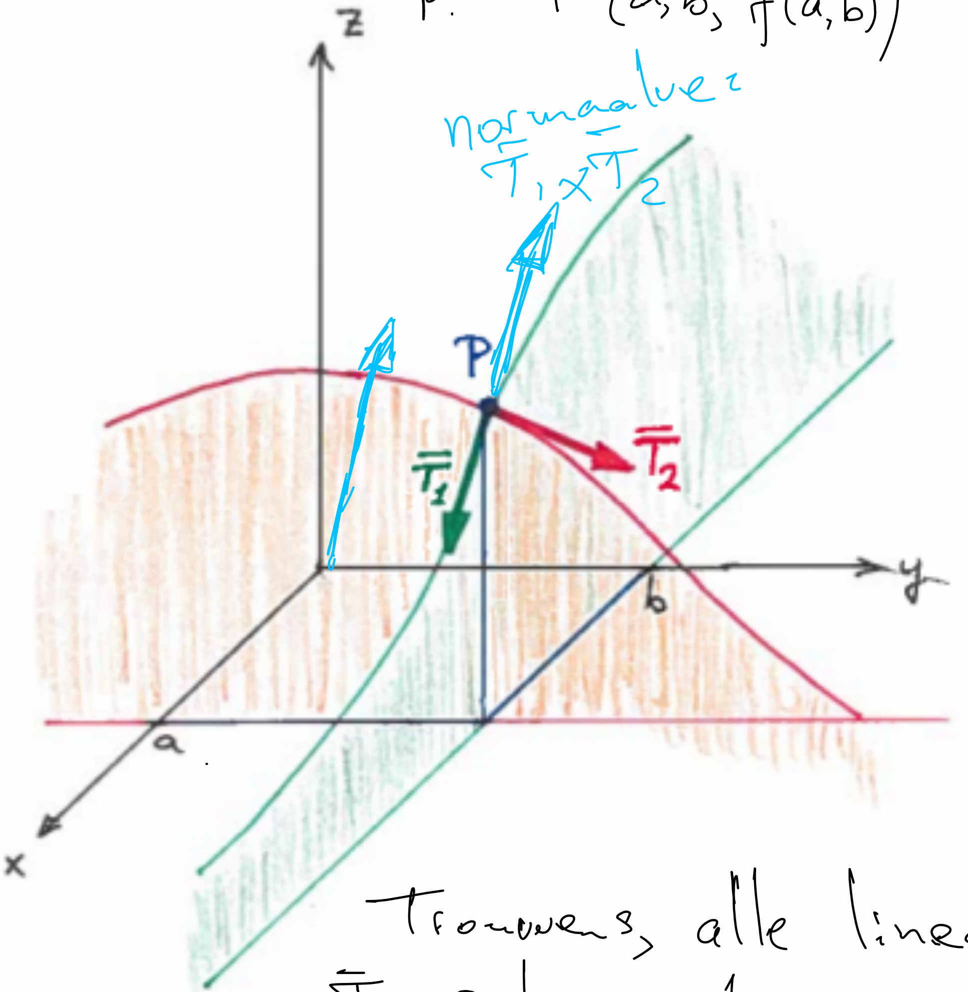
Partiële diff. vgl.
bevat partiële afgeleides

Gewone diff. vgl
bevat "gewone" afgeleides

$z = f(x,y)$

punt $P\,(a, b, f(a,b))$

TANGENT PLANES & NORMALS



f is "glad" dwz
f_1 en f_2 bestaan en
ze zijn continu.

$\bar{T}_1$ is een vector die in
P raakt aan het opp.
$\boxed{\text{in de } x\text{-richting}}$

$\bar{T}_1 = \hat{\imath} + f_1(a,b)\,\hat{k}$

Idem $\bar{T}_2$

$\bar{T}_2 = \hat{\jmath} + f_2(a,b)\,\hat{k}$

Trouwens, alle lineaire combinaties van $\bar{T}_1$ en $\bar{T}_2$ raken ook aan het opp $z = f(x,y)$ in (a,b)
(dwz $\lambda \bar{T}_1 + \mu \bar{T}_2$)

Het uitproduct $\bar{T}_1 \times \bar{T}_2$ staat loodrecht op het raakvlak.

$\bar{T}_1 \times \bar{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oh, maar dan staat ook

$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ loodrecht op het raakvlak.

> inproducten met $\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix}$

Dus een vergelijking voor het raakvlak is

vanwege $\perp$

$$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

Haakjes uitwerken:

$$f_1(a,b)\,x + f_2(a,b)\,y - z = f_1(a,b)\,a + f_2(a,b)\,b - f(a,b)$$

(Herinner: $px + qy + rz = 0$ is de vgl van een vlak.

- Ga na: $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ is een normaalvector van dit vlak
- $px + qy + rz = 23$ is een vlak dat evenwijdig is maar

dan een stukje opgeschoven.

- Ook het vlak $px + qy + rz = 3$ heeft normaalvec $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$