Part. diff. en de kettingregel.

$f(u,s,t)$ waarin $u = u(t)$

$\frac{\partial f}{\partial t} = ??$ Bedoel je: f diff naar z'n derde variabele? (A)

Of: hoe hangt f van t af in z'n geheel? (B)

(A): $f_3(u,s,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{u,s}$ Notatie wordt veel gebruikt in de litteratuur.

Dit betekent: je houdt u, s constant ook als ze evt van t afhangen.

(B): $\frac{\partial f}{\partial t}$ notatie voldoet.

Hogere orde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x^2-y^2, xy) \quad \text{ambigu}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

<u>Optie 1</u> Je bedoelt $f_{21}(x^2-y^2, xy)$

<u>Optie 2</u> Noem $f(u,v)$ met $u = x^2-y^2$, $v = xy$

$$\begin{cases} u_x = 2x & v_x = y \\ u_y = -2y & v_y = x \\ u_{yx} = 0 & v_{yx} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(u,v) = \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}$$ lange notatie

$$= f_u u_y + f_v v_y$$ korte notatie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underline{f_u}\, \underline{u_y} + \underline{f_v}\, \underline{v_y}\right]$$

$$= f_{uu} u_x u_y + f_u u_{yx} + f_{vu} u_x v_y + f_v v_{yx}$$
$$+ f_{uv} v_x u_y \qquad\qquad + f_{vv} v_x v_y$$

$$= -4xy f_{uu} + 0 + 2x^2 f_{vu} + f_v - 2y^2 f_{uv} + xy f_{vv}$$

$f(u,v) = u^2v^2 \quad f_u = 2uv^2 = 2(x^2-y^2)x^2y^2, \quad f_v = 2u^2v = 2(x^2-y^2)^2 xy$ etc.

Alternatieve aanpak: <u>omdat je f, u, v kent</u>

$$f(u,v) = u^2 v^2 = (x^2-y^2)^2 x^2 y^2$$

Heel vaak in praktijk niet waar.

Laplace vergelijking $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (2D) of $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ (3D)

Transformeren naar poolcoord.

- nuttig om eens gedaan te hebbe
- niet uit het hoofd
- zie boek
- wel kunnen gebruike.

§12.6 t/m differentials

$z = f(x,y)$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Het raakvlak in een punt (a,b) aan het opp $z = f(x,y)$ ~~is~~ is gegeven door $z = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Dit raakvlak geeft de beste ~~mogel~~ lineaire benadering van f in de buurt van (a,b).

Beste lin. benadering noteren we soms als $L(x,y)$ of $L_{(a,b)}(x,y)$

Dus $L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Kunt dit opvatten als: Taylor van orde 1 in dim. 2.

Def. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heet diffbaar in (a,b) indien

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

Informeel: de lineaire benadering is ook echt goed als je maar dichtgenoeg naar (a,b) toe gaat.

- Middelwaardestelling – overslaan
- Stelling 4 Als $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu zijn in een omgeving van (a,b)
  Dan is f diffbaar in (a,b).
  (Fyne stelling!)
- Proof of chain rule. – overslaan
- Differentials

Zij $z=f(x,y)$. Schrijf: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= \underline{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)} + \underline{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, \eta) - f(x,\eta)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$\left(\begin{array}{l}\Delta x \to \text{infinitesimaal } dx \\ \Delta y \to \quad \text{"} \quad dy\end{array}\right)$

Voorbeeld.

Doos lengte x, breedte x; hoogte y

Volume $= V(x,y) = x^2 y$

Vraag: hoeveel neemt V toe als x 0,001 toeneemt en y 0,002 toeneemt.

Opl: $\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial V}{\partial y} = x^2$, $dx = 0{,}001$, $dy = 0{,}002$

$$dV \approx 2xy\,dx + x^2\,dy$$

$$\cancel{= 2xy}$$

$$\approx 0{,}002xy + 0{,}002x^2 = 0{,}002x(x+y)$$

NB je gebruikt lineaire benadering.

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ men noemt dit de totale afgeleide van z.

PI

"Zeg Sint", zegt wistechpiet,
In Unnik Groen, het is niet fier!
Zit iedereen aan zijn limiet
Op maandagmiddag om half vier

Men zit er continu
en totaal afgeleid
te denken: "wat toch nu?"
en parametriseert op tijd.

Welnu, zegt Sint hem in retour
Het is er constant van niveau,
ook wel genaamd "lijn van contour"
Ach wat, ik weet wel een cadeau.

Ik weet, het klinkt niet ~~z~~ zo fideel
een halve piet* is arg van het kwadraat, van i
dat is een piet partieel
Ook wel ~~genaamd de~~ bekend als pi

Prijsvraag.

Morgen WC vóór 1600 uur
Sint-gedicht inleveren over wiskunde.