Veldlijnen = Trajectoriëen = integraalkrommen

In elk punt van een veldlijn is de richting vd veldlijn evenwijdig aan het vectorveld

Je kunt ze i.h.a. vinden door het oplossen van diff vgl.

(Gaan we niet doen)

Herinner gradient:

Scalarveld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} \quad \text{of} \quad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

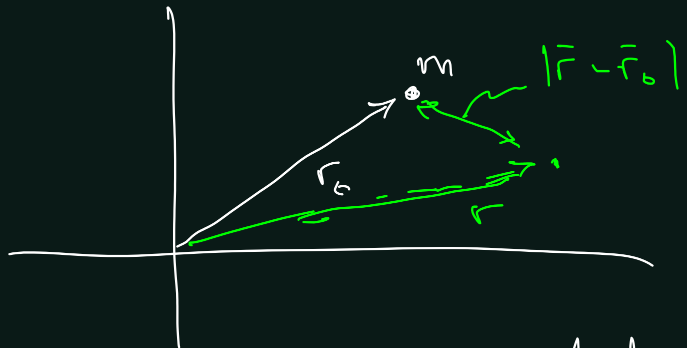
Merk op: grad f is een vectorveld. Idem in $\mathbb{R}^3$

Definitie 1) een vectorveld dat de gradient is van een scalarveld heet conservatief

2) Het scalarveld dat het conservatieve veld levert, heet potentiaal.

VB φ scalarveld $\varphi(\bar{r}) = \frac{km}{\|\bar{r} - \bar{r}_0\|}$ met

$\boxed{\begin{array}{l} k, m \text{ constanten} \\ \bar{r} \text{ variabele} \\ \bar{r}_0 \text{ is positie van massa } m \\ \text{(const)} \end{array}}$



Ik beweer: φ is zwaartekrachtpotentiaal van massa m.

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Gebruik kettingregel:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial |\bar{r}-\bar{r}_0|}\frac{\partial |\bar{r}-\bar{r}_0|}{\partial x}$$

met $\frac{\partial \varphi}{\partial |\bar{r}-\bar{r}_0|} = \frac{-km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}$

Neem $\bar{r} = (x, y)$

$\bar{r}_0 = (x_0, y_0)$

en $\frac{\partial |\bar{r}-\bar{r}_0|}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\partial x}$

$$= \frac{2(x-x_0)}{2\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$= \frac{x - x_0}{|\bar{r}-\bar{r}_0|}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2} \cdot \frac{x-x_0}{|\bar{r}-\bar{r}_0|}$$

$$= \frac{-km(x-x_0)}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$$

Analoog:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-km(y-y_0)}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}$$

Dus:

$$\boxed{\operatorname{grad} \varphi} = \frac{-km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}(x-x_0, y-y_0)$$

$$= \boxed{-km\frac{\bar{r}-\bar{r}_0}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^{3}}}\ 2+1$$

Na wat beschouwing zien we dat grad φ de richting en grootte vd zwaartekracht heeft

van $\bar{r}$ naar $\bar{r}_0$

$\frac{km}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^2}$

Dus: grad φ is zwaartekracht, en φ is zw.kr. potentiaal.

Belangrijk: als je een vectorveld hebt, wil je weten of het afkomstig zou kunnen zijn van een potentiaal, en zo ja van welke.

Stel dat $\bar{F} = (F_1, F_2)$ een potentiaal φ heeft.

dwz $(F_1, F_2) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

F ken je wel maar φ niet.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \quad \Bigg\| \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

Als je φ glad was, dan $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$

Conclusie: als $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ dan heeft F zeker geen potential.

<u>Voorbeeld</u> $F(x,y) = (x, -y)$. Vraag: potentiaal?

Testje doen: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y} x = 0$ en $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-y) = 0$

Zijn gelijk, laten we potentiaal proberen te vinden.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \quad \text{dwz} \quad \underbrace{\varphi = \frac{1}{2}x^2 + f(y)}_{?}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -y \text{ dwz: } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2 + f(y)\right) = f'(y) = -y$$

dan moet $f(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c$

conclusie: $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + c$

CHECK: inderdaad geeft grad φ het juiste vectorveld $\vec{F} = (x, -y)$