§15.3 line integrals = padintegralen (in scalarveld)
§15.4 padintegralen in vectorvelden
vgl: §11.3 krommen, parametriseren, booglengte

Lengte van kromme C is $s = \int_C ds$

Kies parametrisering $\bar{r} = \bar{r}(t)$ van C van $t=a$ tot $t=b$:

$$s = \int_C ds = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

§15.3: zelfde C en parametrisering,
bovendien scalarveld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\bar{r} \mapsto f(\bar{r})$

NB onafh. van param!

Integreer f langs pad C, met gekozen parametrisering $\bar{r} = \bar{r}(t)$:

$$\int_C f(\bar{r})\, ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

NB uitkomst onafh van keuze param

Voorbeeld / betekenis:

1) C = draad of kabel, f = massadichtheid, $\int_C f ds$ = massa
2) C = lijn 12, f = aantal in/uitstappers onderweg; $\int_C f ds$ = #passagiers
3) C = lekke oliepijp, f = lekkage, $\int_C f ds$ = totaal verlies

Lijnintegraal in Scalarveld

Kromme C met parametrisering $\bar{r} = \bar{r}(t)$ met $a \leq t \leq b$

veld f

$$\int_C f \, d\cancel{r}s = \int_a^b f(\bar{r}(t)) \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

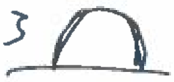
Vergelijk booglengte:

$$s = \int_C ds = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

Voorbeeld:

$$f(x,y) = x + y$$

C: HALVE cirkel met straal 3



parametriseer: $\bar{r} = (3\cos t, 3\sin t)$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = (-3\sin t, 3\cos t)$$

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = +3 \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int_C f \, ds = \int_0^{\cancel{2}\pi} 3(\cancel{x}3\cos t + 3\sin t) \, dt$$

$$= 9 \int_0^{\cancel{2}\pi} \cos t + \sin t \, dt = -18$$

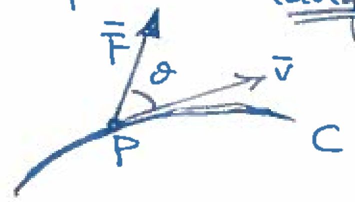
§15.4 Padintegraal in vectorveld.

Krachtveld oefent arbeid uit op deeltje P op pad.

Arbeid W = kracht F maal weg s

$$W = \int dW = \int \vec{F}\, ds$$ wat is dit?

NB: alleen de component langs het pad verricht arbeid



Comp. langs pad: $\bar{F}\cos\vartheta = \bar{F}\cdot\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \boxed{\frac{\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}}{|d\bar{r}/dt|}}$

merk op: scalar! kies param $\bar{r}=\bar{r}(t)$ ook scalar!

Inpluggen in §15.3:

$$W = \int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$$ def. $\boxed{\text{padintegraal in vectorveld}}$

ook als niet over abeid gaat

$$= \int_C \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\, dt$$

interpreteer als

$$= \int_C \frac{\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}}{|d\bar{r}/dt|}\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| dt \longrightarrow$$ padintegraal in scalarveld.

Voorbeeld:

$$\bar{F} = y^2\bar{\imath} + 2xy\,\bar{\jmath} = (y^2, 2xy)$$

→ C_1: $y = x^2$, van $(0,0)$ tot $(1,1)$

Kies parametrisering

$$\bar{r}(t) = (t, t^2) \; ; \qquad \bar{r}(0) = (0,0)$$
$$\bar{r}(1) = (1,1)$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (t^4, 2t^3)$$

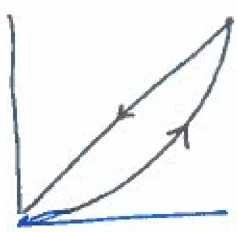
$$\int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^1 (t^4, 2t^3)\cdot(1, 2t)\,dt$$
$$= \int_0^1 5t^4\,dt = t^5\Big|_0^1 = 1$$

→ C_2: $y = x$, van $(1,1)$ tot $(0,0)$

Kies parametrisering

$$\bar{r}(t) = (1-t, 1-t) \qquad \bar{r}(0) = (1,1)$$
$$\bar{r}(1) = (0,0)$$

$$\int_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^1 \left((1-t)^2, 2(1-t)^2\right)\cdot(1, 1)\,dt$$
$$= \int_0^1 3(1-t)^2\,dt = (1-t)^3\Big|_0^1 = -1$$



$$\text{Dus} \oint_{C_1+C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{C_1} + \int_{C_2} = 0$$

Herinner nog uit § 15.2:

Een vectorveld $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heet <u>conservatief</u> als er een scalarveld $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bestaat met $F = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ en dan heet φ een <u>potentiaal</u> van F.

of ook met $\mathbb{R}^2$

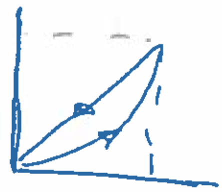
<u>In § 15.4</u> hadden we een <u>voorbeeld</u> nl:

$\bar{F}(x,y) = (y^2, 2xy)$ vectorveld in $\mathbb{R}^2$

Twee krommen nl C_1: $y = x^2$ van $(0,0)$ tot $(1,1)$

C_2: $y = x$ van $(1,1)$ tot $(0,0)$

$C_1 + C_2$ is een gesloten pad van $(0,0)$ via $(1,1)$ naar $(0,0)$



We hebben gezien

$$\oint_{C_1+C_2} \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$$

We hebben ook gezien:

$\bar{F}$ is conservatief, met potentiaal $\varphi(x,y) = xy^2$

Bewering 1

Als F een conserv. veld,

dan $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ voor elke gesloten C

Immers: Zij $F = \nabla\varphi$

Kies param. $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ van C met $0 \le t \le 1$

Dan $F\cdot dr = \nabla\varphi \cdot dr$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(dx, dy, dz)$$

$$= d\varphi$$

en dus $\oint_C F\cdot dr = \int_C^{*} d\varphi = \varphi(r(t))\Big|_{t=0}^{t=1} = 0$

~~Bewering 2~~

~~Als $\oint_K \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ voor elke gesloten kromme K~~

~~En P_0 en P_1 zijn willk. punten in Dom F~~

~~dan is $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ onafhankelijk van de kromme C~~

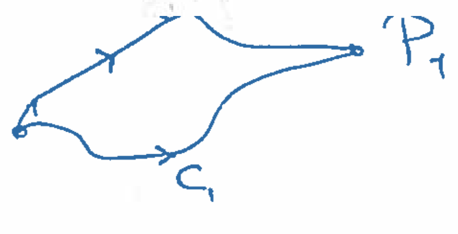
Bewering 2: Als P_0 en P_1 willk. punten in Dom F zijn,

C een kromme tussen P_0 en P_1, en

$\oint_k \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ voor alle kringen k,

dan hangt $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ niet af van de keuze van C

Immers:



Neem twee verschillende krommen C_1 en C_2

Merk op $K = C_1 - C_2$ is een gesloten kromme

dus $0 = \int_K \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} - \int_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$

zodat $\int_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{C_2} \bar{F}\cdot dr.$

Bewering 3

Als $\int_C F\cdot dr$ slechts afhangt van de eindpunten van C, en niet van C zelf, dan is F conservatief

Bewijs: Kies een punt P_0 vast

Definieer $\varphi(x,y,z) = \varphi(P) = \int_{P_0}^{P} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r}$

Scalar fie

We bekijken $\frac{\partial \varphi(P)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{P_0}^{P} \bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_{P_0}^{P} F_1(r)dx + F_2(r)dy + F_3(r)dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{P_0}^{P} F_1(\bar{r})\, dx$$

$$= F_1(P)$$

NB $\int_{P_0}^{P} F_2(r)\,dy + \int_{P_0}^{P} F_3(r)\,dz$ weggemoffeld

Op dezelfde manier laten zien dat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3$$

Concludeer dat φ een potentiaal is van F.

Samenvattend stelling

Zij D open en samenhangend domein en $\bar{F}$ glad vectorveld

tussen elke 2 punten is er een pad.

Dan zijn equivalente uitspraken:

(a) F conservatief

(b) $\oint_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0$ voor alle gesloten paden C

(c) $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ hangt slechts van de eindpunten van C af, niet van C zelf