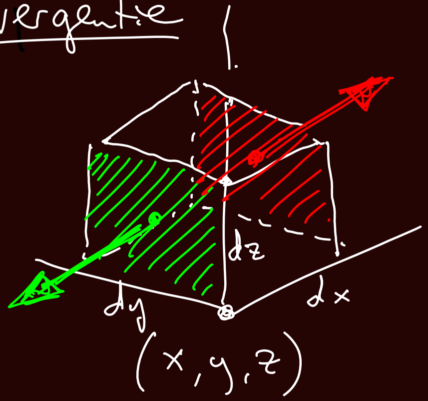
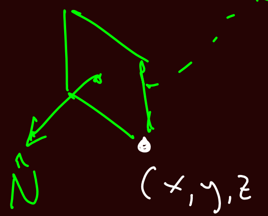
Divergentie



Vectorveld $F = (F_1, F_2, F_3)$

Volume infinitesimaal klein blokje: $dx\,dy\,dz = dV$

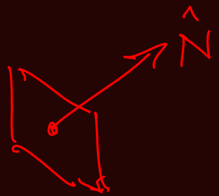
Flux van F door blokje: per zijvlak



opp $dy\,dz = dS$

Veronderstel F const op zijvlak

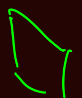
normaalvec $\hat{N} = (-1,0,0)$



opp $dS = dy\,dz$

$\hat{N} = (1,0,0)$

veld $F = F(x+dx, y, z)$

Vergelijk  met  :

$$\text{netto } \cancel{-F_1(x,y,z)\,dy\,dz} \; \cancel{+F_1(x,y,z)\,dy\,dz} \; \boxed{+\frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz}$$

Flux:

$$F\cdot\hat{N}\,dS = -F_1(x,y,z)\,dy\,dz$$

Flux:

$$F\cdot\hat{N}\,dS = +F_1(x+dx,y,z)\,dy\,dz$$

lineariseren mbv Taylor:

$$F_1(x+dx,y,z) \approx F_1(x,y,z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx$$

daarmee wordt flux:

$$\left(F_1(x,y,z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz$$

Idem voor links rechts

netto flux $\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$

Idem boven & onder:
netto flux $\frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$

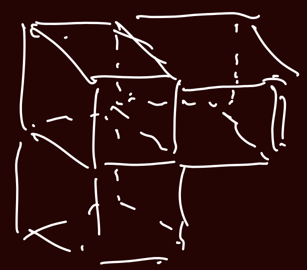
Conclusie:
de totale flux van F door ons blokje is

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

oftewel de totale flux is $\operatorname{div} F\, dV$

Dwz betekenis van divergentie: opvatten als lokale "productie" van veld.

Neem nu twee blokjes



Per zijvlak flux uitrekenen
maar op het tussenvlakje vallen
de twee bijdragen weg.

Meer blokje stapelen: vul een of ander volume V
met kleine blokjes dV:
Totale flux door de rand van V
is gelijk aan de som van divergenties in blokjes dV

oftewel: $$\boxed{\iint_{\substack{\text{rand van}\\ \text{volume}}} F \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_{\text{volume}} \operatorname{div} F\, dV}$$ Divergentie stelling (Gauss, Ostrogradsky)

Mits volume begrensd
opp gesloten (en orienteerbaar)

Notatie: als we het volume V noemen
dan geven we de rand van V vaak aan als ∂V

$$\iint_{\partial V} \bar{F} \cdot d\bar{S} = \iiint_{V} \nabla \cdot F\, dV$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \partial V \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{div}} \\ \xleftarrow{\partial} \end{array} \begin{bmatrix} f \\ V \end{bmatrix}$$

Voorbeeld B bol met straal a $\qquad x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

∂B sfeer met straal a $\qquad x^2+y^2+z^2 = a^2$

Gevraagd $\displaystyle\iint_{\partial B} x^2+y^2\, dS$ mbv div-stelling: $\displaystyle\iint_{\partial B} F \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} F\, dV$

Vectorveld?!?...

$\hat{N} = \frac{1}{a}(x,y,z)$ $\qquad$ Zoek $F = (F_1, F_2, F_3)$ zo dat $F \cdot \hat{N} = x^2+y^2$

$F \cdot \hat{N} = \frac{1}{a} F_1 \cdot x + \frac{1}{a} F_2 \cdot y + \frac{1}{a} F_3 \cdot z = x^2+y^2$

dus kies $F = (ax, ay, 0)$

Dan is $\displaystyle\iint_{\partial B} x^2+y^2\, dS = \iint_{\partial B} F \cdot \hat{N}\, dS \underset{\text{DIV.ST.}}{=} \iiint_B \operatorname{div} F\, dV$

Hierin is $\operatorname{div} F = a + a + 0 = 2a$

$\displaystyle\iiint_B \operatorname{div} F\, dV = 2a \iiint_B dV = 2a \cdot \operatorname{Vol}(B) = 2a \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8\pi}{3} a^4$

Bekijk $F = (x, y, z)$, dan is $\operatorname{div} F = 3$

Neem een ding V $\qquad \displaystyle\operatorname{Vol}(V) = \iiint_V dV \underset{\text{div}}{=} \frac{1}{3} \iint_{\partial V} F \cdot \hat{N}\, dS$

NB: **Flux** is transport van vectorveld door opp.

Div is productie van vectorveld

Zwaartekrachtveld $F = m \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ $(\bar{r} \neq 0)$

$f \xrightarrow{grad} F \xrightarrow{curl} G \xrightarrow{div} g$

Div? $$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Kettingregel:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \ldots ??$$ uhh.

$F_1 = \frac{x}{|\bar{r}|^3}$ met $|\bar{r}| = r$ dus $F_1 = \frac{x}{r^3}$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$r^2 = x^2+y^2+z^2$$
$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - 3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial x}x = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$= \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r}$$
$$= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$ en $\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

OK, dus $\operatorname{div} F = 0$ (behalve in $\bar{r} = 0$)

Maar F is conservatief dus $F = \operatorname{grad} f$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ dus f is harmonisch.