Stelling v. Green Zij S begrensd ~~gesloten en~~ regulier opp in $\mathbb{R}^2$, ∂S rand van S en F vectorveld in $\mathbb{R}^2$ ①

dan geldt: $\displaystyle\oint_{\partial S} F_1\,dx + F_2\,dy \overset{\text{stelling}}{=} \iint_S \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy$

|| (zowiezo)

$$\oint_{\partial S} F \cdot d\bar{r}$$

Stelling van Stokes Zij S oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met rand ∂S

dan geldt: $\displaystyle\oint_{\partial S} F \cdot d\bar{r} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot d\bar{S}$

mits S en ∂S dezelfde orientatie hebben

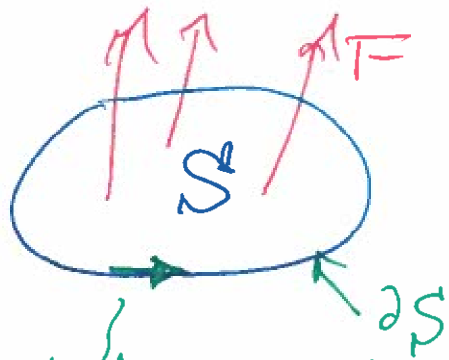
Deze stellingen zijn "bijna" hetzelfde:

Neem bij Green $\bar{F} = (F_1, F_2)$ in $\mathbb{R}^2$

stop het in $\mathbb{R}^3$: $\bar{F}^* = (F_1, F_2, 0)$

$$\operatorname{curl} \bar{F}^* = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

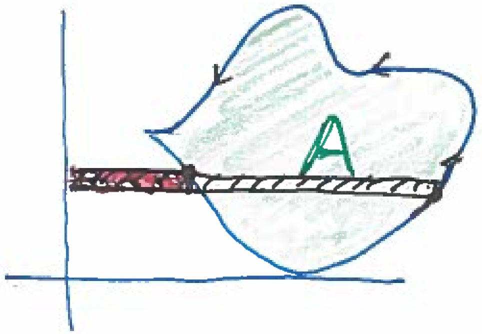
maw: $\operatorname{curl} \bar{F}^* = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$



positief georiënteerd als de binnenkant aan je linkerhand zit.

Voorbeelden

1).



$$\boxed{\text{opp } A} = \iint_A dA = \iint_A dx\,dy$$

Neem vectorveld $F(x,y) = (0, x)$

$$\text{curl } F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k} = \hat{k}$$

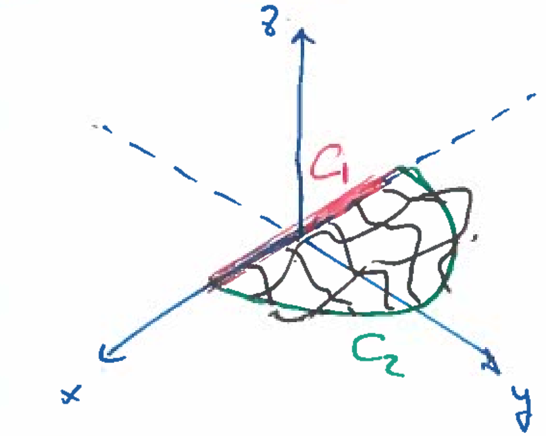
$$\text{Opp } A = \iint_A 1\, dA = \cancel{\iint_A \hat{k}\cdot\hat{k}\, dA} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}\cdot\hat{k}\, dA$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \oint_{\partial A} F\cdot dr = \oint_{\partial A} F_1\,dx + F_2\,dy = \boxed{\oint_{\partial A} x\,dy}$$

parametriseer rand
invullen
uitrekenen

Werkt ook met $F(x,y) = (-y, 0)$

§16.5 opg. 9



$C_1: (x,0,0)$ met $-1 \leq x \leq +1$

$C_2: x^2+y^2=1$ met $y \geq 0$ en $z=0$

S: glad opp met rand $\partial S = C_1 \cup C_2$

$$F(x,y,z) = (\alpha x^2 - z,\ xy + y^3 + z,\ \beta y^2 (z+1))$$

Gevraagd: 1) voor welke α, β is $\iint_S F \cdot d\bar{S}$ onafhankelijk van S?

2) hoe groot is die flux dan?

Opl: 1). Als $\boxed{\iint_S F \cdot d\bar{S}}$ onafh van S is, dan hangt ie dus alleen van de rand ∂S af. Dus doe iets met stokes.

dus $\boxed{\iint_S \operatorname{curl} G \cdot d\bar{S}} = \int_{\partial S} G \cdot d\bar{r}$ voor een of andere G.

Voor G zodanig dat $\operatorname{curl} G = F$

dwz $0 = \operatorname{div} \operatorname{curl} G = \operatorname{div} F$

$\operatorname{div} F = 2\alpha x + x + 3y^2 + \beta y^2 = 0$ voor alle x,y waaruit $x(2\alpha+1) + y^2(3+\beta) = 0$

oftewel $\boxed{\alpha = -\tfrac{1}{2} \text{ en } \beta = -3}$

2). $\cancel{\iint_S G}$ $\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S}$ gevraagd. Stel G zdd $\text{curl}\, G = F$

dan Stokes: $\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_S \text{curl}\, G \cdot d\bar{S} = \int_{\partial S} G\cdot d\bar{r}$

Twee mogelijkheden: 1) vind G lastig.

2). kies je favoriete oppervlak S, makkelijk.

Kies S ~~tie~~ de halve cirkel begrensd door C_1 en C_2

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{F}\cdot \underline{\hat{k}\, dS} = \iint_S -3y^2\, d(x,y) = \cancel{\int_{-1}^{1} -3y^2\, dx}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_0^{+\sqrt{1-x^2}} -3y^2\, dy\, dx \underset{\text{pool}}{=} -3\int_0^1\int_0^{\pi} \sin^2\theta\, r^3\, d\theta\, dr = \text{etc}$$

$\hat{N}$

dS