Eigenwaarden / eigenvectoren

Zij A vierkante matrix $\bar{v}$ vector, $\bar{v} \neq \bar{0}$

Als $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$ voor een scalar λ

dan heet λ een eigenwaarde van A, en $\bar{v}$ heet eigenvector bij λ.

Voorbeeld $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus 3 is eigenwaarde van $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is eigenvector bij 3

Toepassing: o.a. PageRank, Schrödinger vgl., diff vgl. mechanica

Vraag: vind eigenwaarden (e.w.) en eigenvectoren (e.v.) van matrix.

Algemeen: Je hebt A, je zoekt λ en $\bar{v}$ zdd $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$

Herschrijf: $A\bar{v} - \lambda \bar{v} = \bar{0}$

$A\bar{v} - \lambda I \bar{v} = \bar{0}$

$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

NB: $\bar{v} = \bar{0}$ is niet interessant (vinden we dan ook geen e.v.)

We hebben nodig dat $\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$

Voorbeeld: $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&9\end{pmatrix}$ We zoeken λ waarvoor $\det(A-\lambda I)=0$

dwz $\boxed{\det\begin{pmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&4\\0&4&9-\lambda\end{pmatrix}=0}$ Karakteristieke vergelijking van A

$\boxed{(2-\lambda)\left((3-\lambda)(9-\lambda)-16\right)=0}$

$2-\lambda=0$ of $\lambda^2-12\lambda+11=0$

$\boxed{\lambda=2 \quad \text{of} \quad \lambda=1 \quad \text{of} \quad \lambda=11}$ dit zijn de e.w.

Nu zoeken we nog $\bar{v}$ bij λ zdd $A\bar{v}=\lambda\bar{v}$

Bij $\lambda=1$ $(A-I)\bar{v}=\bar{0}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

eis: $v_1=0$

$2v_2+4v_3=0$ kies $v_3=1$ dan $v_2=-2$ $\Big\}$ eigenvector $\bar{v}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

Check: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ &

Merk op: voor elke $c \neq 0$ is $c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ook eigenvector

Da's heel algemeen. Want $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ dan $A(c\bar{v}) = cA\bar{v} = c\lambda\bar{v}$
$= \lambda c\bar{v}$

Bij $\lambda = 2$ vind je op dezelfde manier.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dus v_1 vrij

en $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. dus $v_2 = 0$, $v_3 = 0$

Conclusie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ is e.v.

en elk veelvoud ervan ook
(behalve $\bar{0}$)

Bij $\lambda = 11$: vind je $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als e.v.

Nota Bene
- Noem $\bar{0}$ nooit eigenvector
- $\lambda = 0$ kan wel heel goed eigenwaarde zijn.

Diagonaliseerbaarheid

A $n \times n$ matrix met n verschillende e.w. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$

dan blijken de ev. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$ lin. onafh.

Maak matrix V met $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n$ als kolommen.

$$AV = \begin{pmatrix} \lambda_1 \bar{v}_1 & \lambda_2 \bar{v}_2 & \cdots & \lambda_n \bar{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Noem $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$ van diagonaal

Dus:

$AV = VD$ $\qquad$ V^{-1} bestaat want de kolommen van V zijn onafh.

Dan kun je doen:

1). links met V^{-1}: $\quad V^{-1}AV = V^{-1}VD = D$

2). rechts met V^{-1}: $A = AVV^{-1} = VDV^{-1}$

Toepassing:

$$A^{2018} = (VDV^{-1})^{2018} = (VDV^{-1})(VDV^{-1})(\cdots\cdots)(VDV^{-1})$$

$$= VDV^{-1}VDV^{-1}VDV^{-1}\cdots\cdots V^{-1}VDV^{-1}$$

$$= VD^{2018}V^{-1}$$

$$= V\begin{pmatrix} \lambda_1^{2018} & & & \\ & \lambda_2^{2018} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{2018} \end{pmatrix} V^{-1}$$

Snel klaar!!!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$