Plusopgave over kegels snijden en parametriseren WT2 nov 2017

In het college hebben we gekeken naar de intersectie van de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ met het vlak $z = 1 + x$. Dit leverde een parabool op. Je maakt het vandaag iets algemener: andere kelgelsneden en je gaat parametriseren.

Neem dezelfde kegel, maar als vlak neem je $z = 1 + ax$ voor een of andere constante a. Je kijkt dus naar het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2, \\ z &= 1 + ax. \end{aligned}$$

1. Ga na wat de meetkundige betekenis is van de constante a: als je twee vlakken neemt met verschillende waarden voor a, wat verandert er dan, en wat blijft hetzelfde? Wat als $a = 0$, of $a = \pm 1$?

2. Elimineer z uit het stelsel en laat zien dat je de intersectie van de oppervlakken kunt beschrijven door
$$(1 - a^2)x^2 - 2ax + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Het speciale geval $a = 0$ is niet erg interessant, en als $a = 1$ krijg je de parabool die wordt beschreven door $y^2 = 1 + 2x$ en $z = 1 + x$ (zoals behandeld in het college). Andere waarden van a zijn iets spannender.

3. Beperk je eerst tot $0 < |a| < 1$. Schrijf vergelijking (1) in de vorm $(ux+p)^2+(vy+q)^2 = A^2$, waarin de constanten u, v, p, q en A uitsluitend van a afhangen. (Gebruik hiervoor kwadraat afsplitsen.)

4. Doe vervolgens hetzelfde voor $|a| > 1$. Gok, aan de hand van de vorige opgave, hoe je de vergelijking (1) in dit geval kunt herschrijven, en ga na of je goed gegokt hebt. (En als je geen idee hebt wat te gokken dan reken je het gewoon uit).

Wellicht herken je de vergelijkingen die je in de vorige opgave gevonden hebt als die van ellips en hyperbool. Maar let op: je hebt alleen de relatie tussen de x- en y-coördinaten beschreven, terwijl de krommen in de ruimte liggen. Als je wilt kun je zelf nagaan dat er door die ruimteligging alleen een extra factor $1 + a^2$ bij de x-coördinaat komt, maar dat is bijzaak voor deze plusopgave.

Parametriseren van deze krommen komt in rechthoekscoördinaten veel minder mooi uit dan in cylindercoördinaten, dus we stappen nu over naar cylinder.

5. Geef het stelsel vergelijkingen van kegel en vlak in cylindercoördinaten.

6. Elimineer z uit het stelsel, en vind een vergelijking in r en θ voor de intersectie. Los deze vergelijking op voor r. Vereenvoudig zo ver mogelijk.

Als het goed is, heb je twee oplossingen gevonden die overeenkomen met $r_+ = \frac{1}{1+a\cos\theta}$ en $r_- = \frac{1}{a\cos\theta - 1}$. Maar in cylindercoördinaten willen we uiteraard dat $r \geq 0$.

7. Wat is de juiste (lees: positieve) uitdrukking voor r als $|a| < 1$, als $|a| = 1$, en als $|a| > 1$? Kun je bij de laatste een verband leggen met de asymptoten van de hyperbool?

8. Tot slot: parametriseer met θ als parameter de intersectie van kegel en vlak.