**Werkblad $\tan \frac{t}{2}$-substitutie** **WT1 okt 2016**

Met de $\tan \frac{t}{2}$-substitutie is het mogelijk om allerlei goniometrische integralen om te zetten in integralen van rationale functies. De werking berust op een combinatie van verdubbelingsformules en goed gekozen algebraïsche manipulaties. In de opgaven hieronder werk je eerst uit hoe de substitutie werkt, en daarna pas je hem toe op $\int \sec t \, \mathrm{d}t$.

Dit soort werk moet je goed leren uitvoeren. Het gaat hier echt om de vaardigheid; het heeft totaal geen zin om deze substitutie uit je hoofd te leren.

1. Schrijf eerst de verdubbelingsformules op. Voor de cosinus zijn er drie vormen: geef ze alledrie.

$$\begin{aligned} \sin 2\xi &= \dots \\ \cos 2\xi &= \cdots = \cdots = \dots \end{aligned}$$

   NB: je hoort deze formules paraat te hebben, of op z'n minst hoor je ze zelf te kunnen afleiden met de Stelling van De Moivre of $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

2. Laat zien dat $1 + \tan^2 \xi = \dfrac{1}{\cos^2 \xi}$.

3. Laat zien dat $\sin 2\xi = 2 \tan \xi \cos^2 \xi$.

4. We gaan nu uitzoeken hoe de substitutie $u = \tan \dfrac{t}{2}$ werkt. Gebruik opgave 2 en een verdubbelingsformule om $\cos t$ uit te drukken als rationale functie van $u$. Geef je antwoord als één breuk. Hint: neem $2\xi = t$.

5. Gebruik opgave 3 om ook $\sin t$ uit te drukken als rationale functie van $u$.

6. Geef nu ook $\tan t$ als een rationale functie van $u$.

7. Als we deze substitutie willen gebruiken bij het primitiveren dan hebben we ook een verband tussen $\mathrm{d}u$ en $\mathrm{d}t$ nodig. Vind dit verband, en schrijf het in de vorm $\mathrm{d}t = \dots \, \mathrm{d}u$ waarbij op de stippels een functie van $u$ staat.

8. **Toepassing:** Gebruik het voorgaande om $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ te berekenen. Als je vastloopt bij het terugsubstitueren ga je naar de volgende vraag.

9. Bij het terugsubstitueren helpt het volgende. Ga na dat

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+u^2}{1-u^2} + \frac{2u}{1-u^2}.$$

10. Controleer je primitieve door differentiëren.