Plusopgave over Tayloren WT1 okt 2017

Inmiddels heb je kennis gemaakt met de Taylor*veelterm* van een functie: een veelterm van een zekere orde waarmee je de functie in de buurt van een steunpunt kunt benaderen. Bijvoorbeeld, de 4-de orde Taylorbenadering van $\log(1+x)$ met steunpunt 0 luidt

$$T_4(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4.$$

In deze plusopgave kijken we naar de Taylor*reeks*: dat is bijna hetzelfde als de Taylorveelterm, behalve dat we *niet stoppen bij de term van een of andere orde*: we gaan als het ware oneindig lang door met Tayloren. De Taylor*reeks* van $\log(1+x)$ is

$$T(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots$$

Voor veel functies (niet alle, maar wel veel van de vertrouwde functies) geldt dat de functie en z'n Taylorreeks aan elkaar gelijk zijn. Zo geldt bijvoorbeeld

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

In het algemeen vind je de Taylorreeks van een functie door te differentiëren. De Taylorreeks voor de log-functie is nog op een andere manier te verkrijgen. We beginnen hiervoor met een staartdeling.

1. Schrijf $\frac{1}{1+x}$ uit in een staartdeling en constateer dat:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Integreer vervolgens beide zijden van deze uitdrukking (naar eigen smaak met of zonder de sigmanotatie). Bepaal de waarde van de integratieconstante door $x = 0$ in te vullen. Ga na of het resultaat overeenstemt met de eerder genoemde Taylorreeks.

Terzijde: bij het werken met sommaties met oneindig veel termen, zoals hierboven, zijn er speciale voorzorgen nodig om te zorgen dat de sommetjes nog zinnig blijven. Het is bijvoorbeeld helemaal niet duidelijk of je zo'n oneindige sommatie wel "term voor term" kunt integreren, zoals je zojuist hebt gedaan. Hier gaan we verder niet op in en het is ook geen tentamenstof.

2. In theorie hebben we met de Taylorreeks een hulpmiddel in handen om logaritmen met willekeurige precisie uit te rekenen. Doe dit voor $\log 2$. Welke x neem je? Als het goed is krijg je een verrassende mooie uitdrukking. Reken (met rekenmachine) een stukje van de sommatie uit. Je zult zien dat dit veel sneller resultaat oplevert.

In praktijk zie je nu wel een probleem aankomen. Het blijkt namelijk dat je wel erg veel termen moet uitrekenen om $\log 2$ ook maar een beetje nauwkeurig te bepalen. We zeggen: de reeks *convergeert* erg langzaam. Voor $x > 1$ wordt het zelfs nog erger: dan is er geen sprake van dat er nog iets zinnigs uit de sommatie komt en we zeggen dat de reeks *divergeert* voor $x > 1$. We gaan nu met een truc de convergentie verbeteren.

3. Bepaal de Taylorreeks van $\log(1-x)$. Dit gaat heel makkelijk als je in de Taylorreeks van $\log(1+x)$ een slimme substitutie doet.

4. Bepaal nu de Taylorreeks van $\log \frac{1+x}{1-x}$. als je gebruik maakt van de bekende rekenregels voor log dan kun je deze vrijwel zonder rekenwerk opschrijven.

Met deze reeks kun je de logaritme van positieve getallen vrij efficiënt benaderen. Merk op dat voor $-1 < x < 1$, de breuk $\frac{1+x}{1-x}$ over alle positieve reële getallen loopt!

5. Los op: $\frac{1+x}{1-x} = 2$. Vind hiermee een benadering voor $\log 2$. Reken een stukje van de gevonden reeks uit.

Voor sommige andere functies kun je op dezelfde manier te werk gaan. Dat levert soms fraaie resultaten, zoals in de volgende opgave.

6. Begin met de staartdeling $\frac{1}{1+x^2}$. Integreer aan beide kanten en bepaal de integratieconstante. Vind hiermee dat $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

Ook hier kun je zien dat de convergentie erg langzaam gaat. Daar gaan we opnieuw wat aan doen, als volgt.

7. Laat met de somformules van sin en cos zien dat:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

   Dit is de somformule voor tan.

8. Laat zien dat $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Hint: neem hierboven $x = \arctan \frac{1}{2}$ en $y = \arctan \frac{1}{3}$.

9. Gebruik nu de eerder gevonden Taylorreeks om $\frac{\pi}{4}$ efficiënter te benaderen.

Dat gaat al beter, maar nog steeds niet heel snel. Het gaat *wel* heel snel met $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. Dat is iets meer werk om te vinden, maar gaat in principe op dezelfde manier.

10. Begin met $x = \arctan \frac{1}{5}$ oftewel $\tan x = \frac{1}{5}$. Gebruik de somformule voor tan om $\tan 2x$ te vinden. Gebruik de somformule nogmaals om $\tan 4x$ te vinden: je krijgt $\tan 4x = \frac{120}{119}$. Gebruik daarna de somformule opnieuw om $\tan(4x - \frac{\pi}{4})$ uit te werken. Uit het resultaat leid je af dat $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

11. Ga na dat je hiermee, en de Taylorformule van arctan van orde 7, al de eerste 5 cijfers achter de komma van π kunt vinden.