# Herentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 9 maart 2015 13:30–16:30

**Aanwijzingen**

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 40 punten.

1. Geef alle oplossingen van het stelsel $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ waarin $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{0}$ de nulvector in $\mathbb{R}^3$, en 4 pt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Geef de vergelijking van een kromme $\mathcal{C}$ die door het punt $(1, 1)$ gaat en alle niveaukrommen van de functie $f(x, y) = x^4 + y^2$ loodrecht snijdt. 4 pt.

3. De kromme $\mathcal{C}$ is de doorsnijding van de oppervlakken $y = x^2$ en $z = \frac{2}{3}x^3$, van $(0, 0, 0)$ tot $(3, 9, 18)$.

   a. Bereken de lengte van $\mathcal{C}$. 4 pt.

   b. Een deeltje beweegt van $(0, 0, 0)$ naar $(3, 9, 18)$ langs $\mathcal{C}$ met een constante snelheid van 1. Bereken de snelheidsvector van het deeltje op het moment dat deze zich in $(1, 1, \frac{2}{3})$ bevindt. 4 pt.
   *Hint: kies een eenvoudige parametrisering en herschaal alleen waar nodig.*

4. Ter herinnering: een functie $u = u(x, y)$ heet harmonisch indien $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Men zegt daarnaast dat een functie $u = u(x, y)$ *biharmonisch* is indien $\Delta u$ harmonisch is.

   a. Laat zien dat voor algemene gladde functies $u = u(x, y)$ geldt dat 4 pt.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

   b. Onderzoek of de volgende uitspraak waar is: als $u(x, y)$ harmonisch is, dan zijn $xu(x, y)$ en $yu(x, y)$ biharmonisch. 4 pt.

5. Gegeven is het vectorveld $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2xz^2\hat{\mathbf{i}} + (xz+y^2)\,\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}z^3\right)\hat{\mathbf{k}}$. Verder is gegeven het gebied $\mathcal{W}$ dat zowel binnen de bol $x^2+y^2+z^2=4$ als de kegel $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ ligt. Bereken de flux van $\boldsymbol{F}$ door de rand $\partial\mathcal{W}$ van $\mathcal{W}$. 6 pt.

6. Bekijk in het $xy$-vlak een gesloten kromme $\mathcal{C}$ die beschreven wordt door de poolvergelijking $r=f(\theta)$, waarin $a \leq \theta \leq b$ en $f$ een of andere differentieerbare functie.

   a. Laat met behulp van de stelling van Green zien dat de oppervlakte van het gebied ingesloten door $\mathcal{C}$ gelijk is aan $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b (f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$. 6 pt.

   *Hint: gebruik* $\boldsymbol{F}(x,y) = \dfrac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{2}$.

   b. Gegeven is de cardioïde $r = 1-\sin\theta$. Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door deze cardioïde. 4 pt.