Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Di 18 apr 2017 13:30 – 16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Vind alle kritieke punten van $f(x, y) = (x + 3)(2y + 1)(x + 3y - 3)$. 4 pt.

Oplossing: De kritieke punten van f zijn de punten waar $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Differentiëren met behulp van de productregel (niet de haakjes uitwerken!) geeft ons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2y + 1)(2x + 3y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x + 3)(2x + 12y - 3). \tag{2}$$

We stellen eerst (1) op nul, dit geeft ons $y = -1/2$ of $y = -2/3x$. De eerste optie invullen in (2) en op nul, en vinden $x = -3$ of $x = 9/2$. De tweede optie, $y = -2/3x$, invullen geeft $0 = (x + 3)(2x - 8x - 3)$, met oplossingen $x = -3, y = 2$ en $x = -1/2, y = 1/3$. De kritieke punten zijn dus:

$$(-3, -1/2), \quad (9/2, -1/2), \quad (-3, 2), \quad (-1/2, 1/3). \tag{3}$$

2. We gebruiken de gebruikelijke notatie voor coördinaten $\boldsymbol{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ etc. Toon aan dat de vergelijking 4 pt.

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_1 - b_1 & x_1 - c_1 \\ x_2 - a_2 & x_2 - b_2 & x_2 - c_2 \\ x_3 - a_3 & x_3 - b_3 & x_3 - c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

een vlak beschrijft door de punten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$.
Hint: denk aan de definitie van determinant als tripelproduct.

Oplossing: Het uitschrijven van de determinant geeft:

$$((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0. \tag{4}$$

Door het uitwerken van de haakjes en het gebruik van de regel $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = -(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{v}$, is dit te schrijven als

$$((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = 0, \tag{5}$$

de vergelijking voor een vlak met steunpunt $\boldsymbol{c}$ en normaalvector $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$. Dit vlak wordt dus opgespannen door de vectoren $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})$ en $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})$, en dus liggen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$ in het vlak.

3. We gebruiken hier de notatie $y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$ etc. en bekijken de partiële d.v. (PDV) $y_t = y_{xx}$.

   a. Laat zien dat de functie $u(x,t) = t^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4t}$ een oplossing is van de PDV. 4 pt.

Oplossing: We berekenen de partiële afgeleiden van $u(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$:

$$u_t = \left(-1/2t^{-3/2} + 1/4x^2t^{-5/2}\right) e^{-x^2/4t} \tag{6}$$
$$u_x = -1/2t^{-3/2}xe^{-x^2/4t} \tag{7}$$
$$u_{xx} = \left(-1/2t^{-3/2} + 1/4x^2t^{-5/2}\right) e^{-x^2/4t}, \tag{8}$$

en dus voldoet deze functie u aan de PDV

   b. Zij $v(x,t) = x/t$. Laat zien dat ook het product uv voldoet aan de PDV, door het product te differentiëren met de productregel en te gebruiken wat je al weet. 4 pt.

Oplossing: We berekenen de afgeleiden van uv met de product regel:

$$
\begin{aligned}
(uv)_t &= u_t v + uv_t && (9)\\
(uv)_x &= u_x v + uv_x && (10)\\
(uv)_{xx} &= u_x x v + 2u_x v_x + uv_{xx} && (11)\\
(uv)_t - (uv)_{xx} &= u_t v + uv_t - u_{xx} v - 2u_x v_x - uv_{xx} && (12)\\
&= \cancel{(u_t - u_x x)}v + uv_t - 2u_x v_x - \cancel{uv_{xx}} && (13)\\
&= t^{-1/2} e^{-x^2/4t} \cdot -xt^{-2} - 2 \cdot -1/2 t^{-3/2} x e^{-x^2/4t} \cdot t^{-1} && (14)\\
&= 0, && (15)
\end{aligned}
$$

waar we gebruikten dat u aan de PDV voldoet, dat $v_{xx} = 0$, dat $v_t = -xt^{-2}$, dat $v_x = t^{-1}$ en dat we u_x nog van a) wisten.

4. Een kromme is voor $0 \leq t \leq 1$ geparametriseerd met 4 pt.

$$\boldsymbol{r}(t) = t\cos(2\pi t)\hat{\mathbf{\imath}} + t\sin(2\pi t)\hat{\mathbf{\jmath}} + (1-t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Bereken de lengte van de kromme.
Je mag gebruiken dat $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

Oplossing: We berekenen eerst de afgeleide van $\boldsymbol{r}$ naar t:

$$\boldsymbol{r}'(t) = (\cos 2\pi t - 2\pi t \sin 2\pi t)\hat{\mathbf{\imath}} + (\sin 2\pi t + 2\pi t\cos 2\pi t)\hat{\mathbf{\jmath}} - \hat{\mathbf{k}}, \qquad (16)$$

en de norm:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}'(t)| &= \sqrt{(\cos 2\pi t - 2\pi t \sin 2\pi t)^2 + (\sin 2\pi t + 2\pi t \cos 2\pi t)^2 + 1}\\
&= \sqrt{2 + 4\pi^2 t^2}. && (17)
\end{aligned}
$$

De lengte van de kromme wordt nu gegeven door:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^1 |\boldsymbol{r}'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{2 + 4\pi^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{2}\pi} \sqrt{1+x^2} dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{2}\pi\sqrt{1+2\pi^2} + \log\left(\sqrt{2}\pi + \sqrt{1+2\pi^2}\right)\right], && (18)
\end{aligned}
$$

waar we de integraal hebben berekend met de substitutie $x = \sqrt{2}\pi t$ en de hint.

5. Bereken het volume dat wordt ingesloten door de cylinder $x^2 + y^2 = 2ay$, de kegel $2a - \sqrt{x^2+y^2} - z = 0$ en het vlak $z = 0$. 6 pt.

Oplossing: Het volume wordt gegeven door de grenzen $0 < z < 2a - \sqrt{x^2+y^2}$ en $0 < x^2+y^2 < 2ay$. In cilindrische coördinaten kunnen we dit schrijven als $0 < z < 2a - r$, $0 < r^2 < 2ar\sin\theta$, oftewel $0 < r < 2a\sin\theta$, wat betekent dat $0 < \theta < \pi$, omdat $r > 0$. Het volume vinden we nu door te integreren:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\int_0^{2a-r} r dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} r(2a-r) dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} a(2a\sin\theta)^2 - \frac{1}{3}(2a\sin\theta)^3 d\theta \\ &= 4a^3\int_0^{\pi}(1/2 - 1/2\cos 2t) - \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \\ &= 2\pi a^3 - \frac{8a^3}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx \\ &= a^3(2\pi - 32/9). \end{aligned} \tag{19}$$

Met dank aan Andy voor het verbeteren van een fout in een eerdere versie

6. Zij $\boldsymbol{F} = (2x^3y\cos^2 z, -3x^2y^2\sin^2 z, 6x^2y\sin z\cos z)$. Bestaat er een vectorveld $\boldsymbol{G}$ zodanig dat $\nabla \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$? 4 pt.

Oplossing: Omdat voor elk glad vectorveld $\boldsymbol{G}$ geldt dat $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{G}) = 0$, kan dit alleen wanneer $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$. We berekenen:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= 6x^2y\cos^2 z - 6x^2y\sin^2 z + 6x^2y(\cos^2 z - \sin^2 z) \\ &= 12x^2y\cos 2z \neq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Dus zo een vectorveld $\boldsymbol{G}$ kan niet bestaan.

7. Gegeven het vectorveld $\boldsymbol{F} = (-y,\, x\cos(1-x^2-y^2),\, yz)$ en de kromme $\mathcal{C}$: $x^2+y^2 = 2, z = 2$. Bereken met een integraalstelling de (opwaartse) flux van $\nabla\times\boldsymbol{F}$ door een glad oppervlak waarvan $\mathcal{C}$ de rand is. 4 pt.

Oplossing: De stelling van Stokes zegt ons dat deze flux gegeven wordt door

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \boldsymbol{F} dS = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{21}$$

waarbij $\mathcal{S}$ een willekeurig glad oppervlak is waarvan $\mathcal{C}$ de rand is. Om de rechterintegraal te berekenen, parameterizeren we $\mathcal{C}$:

$$\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\hat{\mathbf{\imath}} + \sqrt{2}\sin t\hat{\mathbf{\jmath}} + 2\hat{\mathbf{k}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{22}$$

met afgeleide

$$\boldsymbol{r}'(t) = -\sqrt{2}\sin t\hat{\mathbf{\imath}} + \sqrt{2}\cos t\hat{\mathbf{\jmath}}. \tag{23}$$

We rekenen ook alvast even uit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) &= (-\sqrt{2}\sin t\hat{\mathbf{\imath}} + \sqrt{2}\cos t\cos(1-2)\hat{\mathbf{\jmath}} + 2\sqrt{2}\sin t\hat{\mathbf{k}}) \cdot \\ &\quad (-\sqrt{2}\sin t\hat{\mathbf{\imath}} + \sqrt{2}\cos t\hat{\mathbf{\jmath}}) \\ &= 2(\sin^2 t + \cos(-1)\cos^2 t). \end{aligned} \tag{24}$$

De flux wordt dus gegeven door

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \boldsymbol{F} dS &= \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos(-1)\cos^2 t) dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} (1/2 - 1/2\cos 2t) dt + 2\cos(-1)\int_0^{2\pi} (1/2 + 1/2\cos 2t) dt \\ &= 2\pi(1 + \cos(-1)). \end{aligned} \tag{25}$$