Hertentamen Wiskundige Technieken 1

Donderdag 4 jan 2018, 9-12 uur

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert “onmogelijke” tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. a. Vereenvoudig $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. 2 pt.

Oplossing: We maken de noemer reëel door vermenigvuldigen met $1+\mathrm{i}$ en dat moeten we dan ook in de teller doen:

$$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}.$$

b. Vind alle getallen z in het complexe vlak waarvoor geldt dat $z/\bar{z}$ zuiver imaginair is (d.w.z.: op de imaginaire as ligt). 2 pt.

Oplossing: Stel $z = a + b\mathrm{i}$, dan is op dezelfde wijze als bij a:

$$z/\bar{z} = \frac{z^2}{\bar{z}z} = \frac{a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}}{a^2 + b^2}.$$

Dit is zuiver imaginair als $a^2 - b^2 = 0$, dus als $a = \pm b$.

Je moet eigenlijk een uitzondering maken voor $a = b = 0$, omdat je niet kunt delen door $\bar{z}$ indien $z = 0$, maar dat heb ik door de vingers gezien.

Andere manier van oplossen: schrijf $z = re^{\varphi \mathrm{i}}$, dan

$$z/\bar{z} = \frac{z^2}{\bar{z}z} = e^{2\varphi \mathrm{i}};$$

dit is zuiver imaginair als $2\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi + k\pi$ met $k = 0$ of $k = 1$, dit geeft vier oplossingen $\varphi = \pm\frac{1}{4}\pi$, $\pm\frac{3}{4}\pi$, en voor de modulus r eisen we $r \neq 0$.

2. Zij $f(2) = 2$ en $f'(2) = 3$. Bepaal $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(f(f(x)))\big)|_{x=2}$. 2 pt.

Oplossing: We moeten eerst differentiëren met de kettingregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(f(f(x)))\big)|_{x=2} &= f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)|_{x=2}\\ &= f'(f(f(2)))f'(f(2))f'(2) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.\end{aligned}$$

Wie hier 3 als antwoord krijgt, heeft de kettingregel nog niet goed genoeg begrepen! Dat geldt helaas voor erg veel deelnemers.

Wie eerst evalueert en daarna pas differentieert, neemt de afgeleide van de constante $f(f(f(2)))$ en dat is 0.

3. Het uitproduct van twee vectoren in $\mathbb{R}^3$ kan gedefiniëerd worden met een rekenregeltje voor de coördinaten, of als een drietal meetkundige eigenschappen. Geef *beide* definities, en laat zien dat beide definities hetzelfde resultaat voor $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}$ geven. 4 pt.

Oplossing: Het rekenregeltje is:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Als je $x_3 = y_2 = 1$ invult en de andere coördinaten 0 neemt, vind je $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{\imath}}$.

De meetkundige eigenschappen: als $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ dan voldoet $\boldsymbol{w}$ aan:

1. $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\varphi$, waarin φ de hoek tussen $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$;
2. $\boldsymbol{w}$ staat loodrecht op $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$;
3. het drietal $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{w}$ is rechtsgeorienteerd.

Toegepast op $\boldsymbol{x} = \hat{\mathbf{k}}$ en $\boldsymbol{y} = \hat{\mathbf{j}}$ krijgen we dan dat $|\boldsymbol{w}| = 1$, $\boldsymbol{w}$ staat evenwijdig aan $\hat{\mathbf{\imath}}$, en het drietal $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\boldsymbol{w}$ is rechtsgeorienteerd; dus $\boldsymbol{w} = -\hat{\mathbf{\imath}}$ zoals we eerder ook hadden gevonden.

4. Geef een benadering van $\frac{\pi}{4}$ met een vijfde-orde Taylorveelterm van $\arctan x$ in steunpunt 0. Let erop dat je een verstandige waarde voor x kiest! 4 pt.

Oplossing: We stellen $f(x) = \arctan x$ en gaan eerst de eerste vijf afgeleiden van f bepalen. Deze kunnen we daarna evalueren in het steunpunt 0:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arctan x, & f(0) &= \arctan 0 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}, & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -2x(1+x^2)^{-2}, & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} + 8x^2(1+x^2)^{-3}, & f'''(0) &= -2 \\
f^{(4)}(x) &= 8x(1+x^2)^{-3} + 16x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4} \\
&= 24x(1+x^2)^{-3} - 48x^3(1+x^2)^{-4}, & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= 24(1+x^2)^{-3} + \dots, & f^{(5)}(0) &= 24.
\end{aligned}$$

Op de plaats van $\dots$ zijn een aantal termen weggelaten die allemaal x als factor hebben en dus niets bijdragen aan $f^{(5)}(0)$. Het Taylorpolynoom in steunpunt 0 is nu

$$\begin{aligned}
T_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \tfrac{1}{5!}f^{(5)}(0)x^5 \\
&= x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5.
\end{aligned}$$

Om een benadering voor $\frac{1}{4}\pi$ te krijgen nemen we $x = 1$, want $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$, en dan vinden we als benadering

$$T_5(1) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{13}{15}.$$

Opm. 1: als je hier differentieert met de quotientregel dan haal je jezelf een enorme partij strafwerk op de hals!

Opm. 2: arctan *is een oneven functie en dat zie je terug in het feit dat* $f^{(k)}(0) = 0$ *voor alle even* k.

5. Los op: $\dfrac{x}{4-x} < \dfrac{2}{x}$. 4 pt.

Oplossing: Eerst herleiden op 0 en in productvorm:

$$\frac{x}{4-x} < \frac{2}{x}$$
$$\frac{x}{4-x} - \frac{2}{x} < 0$$
$$\frac{x^2+2x-8}{x(4-x)} < 0$$
$$\frac{(x-2)(x+4)}{x(4-x)} < 0$$

We kunnen nu een tekenschema maken waarin eenvoudig valt af te lezen wanneer een oneven aantal factoren van $\frac{(x-2)(x+4)}{x(4-x)}$ negatief is: de tekenwisselingen treden op bij $x = -4$, 0, 2 en 4.

x	$-$	-4	$-$	0	$+$	2	$+$	4	$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$4-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$

We concluderen hieruit dat aan de ongelijkheid is voldaan bij $x < -4$, $0 < x < 2$ of $x > 4$.

6. Laat zien dat $f(x) = \log(\sqrt{x^2+1} - x)$ een oneven functie is. 4 pt.

Oplossing: Voor een oneven functie f geldt dat $f(-x) = -f(x)$. In dit geval hebben we

$$\begin{aligned}
-f(x) &= -\log(\sqrt{x^2+1} - x) \\
&= \log \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \\
&= \log(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x}) \\
&= \log \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{1} \\
&= f(-x),
\end{aligned}$$

hetgeen te bewijzen was.

7. Evalueer de volgende integralen:

a. $\displaystyle\int_t^\infty t\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 4 pt.

Oplossing: Let op, t fungeert hier als een constante! Je krijgt dus de primitieve $-\mathrm{e}^{-tx}$; bij het evalueren moeten we onderscheid maken tussen

$t > 0$: dan $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-tx} = 0$ en dus $\int_t^\infty t\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = +\mathrm{e}^{-t^2}$;

$t = 0$: we integreren de nulfunctie tussen twee grenzen, antwoord 0;

$t < 0$: dan $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-tx} = +\infty$ zodat de integraal divergent is.

Als je het geval $t > 0$ goed hebt gedaan en de andere mogelijkheden over het hoofd zag dan heb ik dat niet fout gerekend.

b. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Oplossing: Als we hier $x = \sqrt{2}\sin u$, $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cos u\,\mathrm{d}u$ substitueren dan krijgen we

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos^2 u}{\sqrt{2}\cos u}\sqrt{2}\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \int 2\cos^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \int 1+\cos 2u\,\mathrm{d}u \\ &= u + \tfrac{1}{2}\sin 2u + c.\end{aligned}$$

Voor het terugsubstitueren gebruiken we $u = \arcsin(x/\sqrt{2})$ en

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u = (\sqrt{2}\sin u)\sqrt{2-2\sin^2 u} = x\sqrt{2-x^2},$$

zodat $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + c.$

c. $\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x$ 4 pt.

Oplossing: Partieel integreren geeft

$$\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(2x) - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De nieuwe integrand is een rationale functie die we eerst vereenvoudigen:

$$\frac{x^2}{1+4x^2} = \frac{\frac{1}{4}(1+4x^2-1)}{1+4x^2} = \tfrac{1}{4} - \frac{1/4}{1+4x^2}$$

zodat

$$\int \frac{x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{8}\arctan(2x)$$

en dus

$$\int x\arctan(2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2\arctan(2x) - \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{16}\arctan(2x) + c.$$

8. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 6 pt.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \mathrm{e}^{-3t},$$
$$x(0) = 0,$$
$$\dot{x}(0) = 4.$$

Hint: voor de particuliere oplossing kun je een veelvoud van de inhomogene term proberen.

Oplossing: Dit is een tweede orde lineaire d.v. met constante coëfficiënten en een inhomogene term. We lossen dus eerst het homogene probleem op met behulp van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

met als dubbele oplossing $\lambda = -2$. Dit betekent dat de oplossing van het homogene probleem bestaat uit alle functies

$$x_H(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-2t}$$

met a en b constanten. Om een particuliere oplossing te vinden, doen we wat de hint zegt: we proberen $x_P(t) = c\mathrm{e}^{-3t}$. Deze invullen in de d.v. geeft:

$$c(9 - 3 \cdot 4 + 4)\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t},$$

oftewel $c(9 - 12 + 4) = 1$, dus we moeten $c = 1$ nemen. De algemene oplossing van de d.v. is dus

$$x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}.$$

Tot slot vullen we de randwaarden in om a en b te vinden:

$$0 = x(0) = a + 1,$$
$$4 = \dot{x}(0) = b - 2a - 3.$$

Dus $a = -1$ en $b = 4 - 2 + 3 = 5$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$x = (5t - 1)\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}.$$

9. Onderzoek de functie $f(x) = \log(x - \log x)$ en maak een nette schets van de 8 pt.

grafiek.

Opmerking: je kunt de exacte ligging van het buigpunt niet vinden, maar je kunt wel vinden tussen welke twee gehele getallen de x-coördinaat ligt: dat is voldoende.

Oplossing:

1. Domein: voor de binnenste log is nodig $x > 0$. Voor de buitenste log is nodig $x - \log x > 0$ maar hieraan is altijd voldaan (immers: $x - \log x$ heeft afgeleide $1 - 1/x$, dus er is een extreem bij $x = 1$; bij $x = 1$ geldt $x - \log x = 1 > 0$ en uit het globale verloop van de grafieken $y = x$ en $y = \log x$ weet je dat dit een minimum moet zijn). het domein van f is dus alle x in $\mathbb{R}$ met $x > 0$.

2. Snijden met de y-as: nvt want $x = 0$ ligt niet in domein.
   Nulpunten: $f(x) = 0$ als $x - \log x = 1$, en we hebben net gezien dat voor $x = 1$ de functie $x - \log x$ zijn minimum 1 aanneemt, dus geldt $f(1) = 0$, en geen andere nulpunten.

3. Randen:
   $\lim_{x\to 0} x - \log x = +\infty$ dus ook $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   $\lim_{x\to\infty} x - \log x = \lim_{x\to\infty} x(1 - \frac{\log x}{x}) = \lim_{x\to\infty} x = \infty$, waarbij we de standaardlimiet $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ gebruiken. Dus ook $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

4. Afgeleide: $f'(x) = \frac{1-1/x}{x-\log x} = \frac{x-1}{x(x-\log x)}$. Dus $f'(x) = 0$ als $x = 1$, dit past mooi op het nulpunt van f.

5. Tweede afgeleide: $f''(x) = \frac{x^2 - x\log x - (x-1)(2x-1-\log x)}{x^2(x-\log x)^2}$. Om te onderzoeken of deze nulpunten heeft, concentreren we ons op de teller (we weten namelijk uit het voorgaande al dat de noemer altijd positief is op het domein van f):

   $$x^2 - x\log x - (x-1)(2x-1-\log x) = -x^2 + 3x - 1 - \log x.$$

   Enkele waarden invullen: bij $x = 1$ is de teller 1 dus positief, bij $x = 2$ krijgen we $1 - \log 2$ ook positief, bij $x = 3$ krijgen we $-1 - \log 3 < 0$. Dus tussen $x = 2$ en $x = 3$ wisselt f'' van teken en dus heeft f daar ergens een buigpunt.

6. Tekenschema:

x	0		1		2		3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	+	0	+	+	+	+	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	+	+	+	+
$f''(x)$		+	+	+	+	$+, -$	$-$	$-$

7. Grafiek: