Hertentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Di 17 april 13:30 – 16:30

Aanwijzingen

- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg voor voldoende **tekst en uitleg** bij je uitwerkingen.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 38 punten.

1. Zij $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

   a. Vind van A alle eigenwaarden en geef bij elke eigenwaarde minstens één eigenvector. 4 pt.

   b. Geef een meetkundige interpretatie van A als lineaire afbeelding in het vlak. 2 pt.

2. Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante $n \times n$-matrix en $\boldsymbol{f}$ het vectorveld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ op $\mathbb{R}^n$. Laat zien dat $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \operatorname{tr} A$, waarin $\operatorname{tr} A$ het spoor van A is, dwz de som van de elementen op de hoofddiagonaal. 4 pt.
   Je kunt deze opgave voor alleen $n = 3$ doen, dan krijg je max 2 punten.

3. Bereken de booglengte van de kromme gegeven door $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. 4 pt.
   Hint: eventueel kun je met impliciet differentiëren makkelijk een uitdrukking voor $\mathrm{d}s$ *vinden.*

4. Integreer x^2y^2 over de schijf met middelpunt $(x, y) = (0, 0)$ en straal 1. 4 pt.

5. Zij $\mathcal{S}$ het oppervlak beschreven door de vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 16$, zij $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ een punt op $\mathcal{S}$, en $\mathcal{V}_{\boldsymbol{u}}$ het raakvlak aan $\mathcal{S}$ in $\boldsymbol{u}$. Bepaal alle punten $\boldsymbol{u}$ waarvoor $\mathcal{V}_{\boldsymbol{u}}$ door het punt $(0, 0, 4)$ gaat. 4 pt.

6. Laat $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ een glad vectorveld zijn waarvoor zowel $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ als $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Laat zien dat F_1, F_2 en F_3 harmonische functies zijn. 4 pt.

zoz voor de laatste opgave

7. Beschouw het $\mathbb{R}^3$-vectorveld $\boldsymbol{F} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, waarin $\boldsymbol{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ en $r = |\boldsymbol{r}|$.
   Verder hebben we de sfeer $\mathcal{B}_t$ met middelpunt $\mathbf{0}$ en straal t.

   a. Laat zien dat $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ in alle punten $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$. 4 pt.

   b. Bereken de uitwaartse flux van $\boldsymbol{F}$ door $\mathcal{B}_t$. 4 pt.

   c. Bepaal met een integraalstelling de uitwaartse flux van $\boldsymbol{F}$ door een gesloten oppervlak $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$. 4 pt.

   Hints:
   a en b hebben niets met elkaar te maken.
   De uitkomst van b is een constante, i.h.b. onafhankelijk van t.
   Gebruik a en b bij c en maak onderscheid of $\mathbf{0}$ wel of niet omsloten is door $\mathcal{S}$.