Hertentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Di 17 april 13:30 – 16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Zij $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

   a. Vind van A alle eigenwaarden en geef bij elke eigenwaarde minstens één eigenvector. 4 pt.

Oplossing: We berekenen het karakteristieke polynoom:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1.$$

Dit polynoom heeft nulpunten $\lambda = \pm 1$, dit zijn de eigenwaarden.

Eigenvectoren bij $\lambda = -1$ zijn de oplossingen $\boldsymbol{x}$ van $(A + I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, d.w.z.:

$$\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraan wordt voldaan bijv als $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1+\cos\theta \end{pmatrix}$ of elk scalair veelvoud daarvan; dit zijn de eigenvectoren bij $\lambda = -1$.

Op dezelfde manier vinden we bij eigenwaarde $\lambda = 1$ als eigenvectoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$ en veelvouden daarvan.

b. Geef een meetkundige interpretatie van A als lineaire afbeelding in het vlak. 2 pt.

Oplossing: Dit is een spiegeling in de lijn door de oorsprong en het punt $(\sin\theta, 1-\cos\theta)$. Immers alle punten op deze lijn corresponderen met een eigenvector bij eigenwaarde 1 en worden dus op zichzelf afgebeeld, terwijl de eigenvectoren bij eigenwaarde -1 loodrecht op die lijn staan (check het inproduct $(-\sin\theta, 1+\cos\theta)\cdot(\sin\theta, 1-\cos\theta) = 0$).

2. Zij $A = (a_{ij})$ een vierkante $n \times n$-matrix en $\boldsymbol{f}$ het vectorveld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ op $\mathbb{R}^n$. Laat zien dat $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \operatorname{tr} A$, waarin $\operatorname{tr} A$ het spoor van A is, dwz de som van de elementen op de hoofddiagonaal. 4 pt.
Je kunt deze opgave voor alleen $n = 3$ doen, dan krijg je max 2 punten.

Oplossing: *Je kunt de opgave natuurlijk ook voor $n = 3$ doen op een kladblaadje, zien hoe het werkt, en tenslotte je uitwerking voor algemene n opschrijven ;-)).*

Neem eerst $n = 3$ en kijk wat ∂_1 toegepast op de eerste coordinaat van $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ oplevert: $\partial_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 = a_{11}$, aangezien we alleen naar x_1 differentiëren. Op dezelfde manier levert ∂_2 toegepast op de tweede coordinaat a_{22}, en ∂_3 op de derde coordinaat a_{33}. Voor algemene n begrijpen we nu dat de j-de operator ∂_j, werkend op de j-de coordinaat van $A\boldsymbol{x}$ namelijk $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n$, precies a_{jj} overlaat. Dus we zien inderdaad dat

$$\operatorname{div} A\boldsymbol{x} = \partial_1(A\boldsymbol{x})_1 + \partial_2(A\boldsymbol{x})_2 + \cdots + \partial_n(A\boldsymbol{x})_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A.$$

3. Bereken de booglengte van de kromme gegeven door $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. 4 pt.

Oplossing: Aan het voorschrift zien we dat $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ en dat de kromme symmetrisch is in de x- en de y-as. De totale booglengte is dus $4\times$ de lengte in het eerste kwadrant, die we kunnen vinden met een geschikte parametrisering. Een voor de hand liggende keuze is $x = t$, $y = (1 - t^{2/3})^{3/2}$ voor $0 \leq t \leq 1$, maar die leidt tot vrij veel werk. Mooier is $x = t^{3/2}$, $y = (1 - t)^{3/2}$, want dan krijg je achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{3}{2}\sqrt{t},\\
\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{3}{2}\sqrt{1-t},\\
\mathrm{d}s &= \sqrt{\left(\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\tfrac{9}{4}t + \tfrac{9}{4}(1-t)}\mathrm{d}t = \tfrac{3}{2}\mathrm{d}t,\\
s &= \int_0^1 \mathrm{d}s = \tfrac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

De lengte van de hele kromme is dus $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$.

Een andere parametrisering waar je makkelijk mee wegkomt is $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Als je de hint wilt gebruiken dan kun je als volgt doen: impliciet differentieren van $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ geeft

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3}\,\mathrm{d}x + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\,\mathrm{d}y = 0$$

waaruit volgt dat

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-1/3} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3},$$

en daarna

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{1 + \left(\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \sqrt{1 + \left(\tfrac{y}{x}\right)^{2/3}}\,\mathrm{d}x\\
&= \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,\mathrm{d}x\\
&= x^{-1/3}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

zodat $s = 4\int_0^1 \mathrm{d}s = 4\int_0^1 x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_0^1 = 6$.

Terzijde: deze kromme heet astroïde omdat hij lijkt op een vierpuntige ster.

4. Integreer x^2y^2 over de schijf met middelpunt $(x, y) = (0, 0)$ en straal 1. 4 pt.

Oplossing: Vanwege de schijf is het wellicht handig om hier poolcoördinaten te gebruiken (met Jacobiaan r):

$$\begin{aligned}\iint_{\text{schijf}} x^2y^2\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^5 \cos^2\theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 r^5 \,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

De eerste integraal hierin is

$$\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{6}r^6\Big|_0^1 = \tfrac{1}{6}.$$

Voor de tweede integraal passen we eerst een verdubbelingsformule toe, daarna een substitutie $u = 2\theta$ en tenslotte de periodiciteit op het integratieinterval:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{4\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u = \tfrac{\pi}{4},\end{aligned}$$

waarbij we de uitkomst vinden door te bedenken dat $\int_0^{2\pi}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 u + \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\times$de oppervlakte van de eenheidscirkel.

Het eindantwoord van de opgave is dus $\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}$.

5. Zij $\mathcal{S}$ het oppervlak beschreven door de vergelijking $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 16$, zij $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ een punt op $\mathcal{S}$, en $\mathcal{V}_{\boldsymbol{u}}$ het raakvlak aan $\mathcal{S}$ in $\boldsymbol{u}$. Bepaal alle punten $\boldsymbol{u}$ waarvoor $\mathcal{V}_{\boldsymbol{u}}$ door het punt $(0, 0, 4)$ gaat. 4 pt.

Oplossing: Een normaalvector $\boldsymbol{n}$ op het oppervlak in het punt $\boldsymbol{u}$ is

$$\boldsymbol{n} = \mathrm{grad}(u_1^2 + u_2^2 + 4u_3^2) = (2u_1, 2u_2, 8u_3),$$

of elk scalair veelvoud daarvan. Dit geeft als vergelijking voor het raakvlak:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + 4u_3x_3 = 16.$$

De eis is dat het punt $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 4)$ hieraan voldoet, en daaruit volgt dat $u_3 = 1$. Om te zorgen dat $\boldsymbol{u}$ ook werkelijk op $\mathcal{S}$ ligt, moeten we nog zorgen dat

$$u_1^2 + u_2^2 = 16 - 4 \cdot 1^2 = 12.$$

Dus de punten $\boldsymbol{u}$ die we zoeken zijn de punten op de cirkel met middelpunt $(0, 0, 1)$ en straal $2\sqrt{3}$ en evenwijdig aan het xy-vlak.

6. Laat $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ een glad vectorveld zijn waarvoor zowel $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ als $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Laat zien dat F_1, F_2 en F_3 harmonische functies zijn. 4 pt.

Oplossing: Omdat $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ geldt:

$$\partial_y F_3 = \partial_z F_2, \quad \partial_z F_1 = \partial_x F_3, \quad \partial_x F_2 = \partial_y F_1.$$

Verder betekent $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ dat $\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = 0$.

We gaan eerst na of F_1 harmonisch is:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} F_1 + \partial_{yy} F_1 + \partial_{zz} F_1 &= \partial_x(\partial_x F_1) + \partial_y(\partial_y F_1) + \partial_z(\partial_z F_1) \\
&= \partial_x(\partial_x F_1) + \partial_y(\partial_x F_2) + \partial_z(\partial_x F_3) \\
&= \partial_x(\partial_x F_1) + \partial_x(\partial_y F_2) + \partial_x(\partial_z F_3) \\
&= \partial_x(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dus F_1 is harmonisch. Hierin hebben we achtereenvolgens gebruik gemaakt van $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, de verwisselbaarheid van gemengde afgeleiden, en $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

Voor F_2 en F_3 gaat de berekening op dezelfde manier.

7. Beschouw het $\mathbb{R}^3$-vectorveld $\boldsymbol{F} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, waarin $\boldsymbol{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ en $r = |\boldsymbol{r}|$. Verder hebben we de sfeer $\mathcal{B}_t$ met middelpunt $\mathbf{0}$ en straal t.

a. Laat zien dat div $\boldsymbol{F} = 0$ in alle punten $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$. 4 pt.

Oplossing: We berekenen eerst de partiële afgeleide van de eerste coördinaat met de product- en kettingregel:

$$\partial_x F_1 = \partial_x(xr^{-3}) = r^{-3} - 3xr^{-4}\partial_x r$$

waarin $\partial_x r = \partial_x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r}$, dus

$$\partial_x F_1 = r^{-3} - 3x^2 r^{-5}.$$

Zo ook

$$\partial_y F_2 = r^{-3} - 3y^2 r^{-5} \text{ en}$$
$$\partial_z F_3 = r^{-3} - 3z^2 r^{-5}.$$

Dus

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 3r^{-3} - 3(x^2 + y^2 + z^2)r^{-5} = 0,$$

omdat binnen de haakjes r^2 staat.

b. Bereken de uitwaartse flux van $\boldsymbol{F}$ door $\mathcal{B}_t$. 4 pt.

Oplossing: Zij $\boldsymbol{r}$ een punt op $\mathcal{B}_t$, dan is $|\boldsymbol{r}| = r = t$ en dan is $\frac{1}{t}\boldsymbol{r}$ een eenheidsnormaalvector op $\mathcal{B}_t$ in dat punt. De flux is dus

$$\iint_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{t} \, \mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{B}_t} \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}{t^4} \, \mathrm{d}A = \frac{1}{t^2} \iint_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}A = \frac{1}{t^2} \cdot 4\pi t^2 = 4\pi,$$

waarbij we de laatste integraal herkend hebben als de oppervlakte-integraal van de sfeer $\mathcal{B}_t$. (De flux is dus inderdaad onafhankelijk van t).

c. Bepaal met een integraalstelling de uitwaartse flux van $\boldsymbol{F}$ door een gesloten oppervlak $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$. 4 pt.

Oplossing: We nemen aan dat $\mathcal{S}$ voldoet aan de voorwaarden van de divergentiestelling van Gauss. Zij $\mathcal{V}$ het gebied dat door $\mathcal{S}$ omsloten wordt.

Stel eerst dat $\mathcal{S}$ het punt $\boldsymbol{0}$ niet omvat. Volgens de div.-stelling is de flux door $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V = 0,$$

gebruik makend van (a) waar we gezien hebben dat $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ op $\mathcal{V}$. Stel vervolgens dat $\mathcal{S}$ het punt $\mathbf{0}$ wel omvat (zodanig dat $\mathbf{0}$ niet precies op $\mathcal{S}$ ligt). Leg om $\mathbf{0}$ een klein bolletje $\mathcal{B}_t$, met t zo klein dat $\mathcal{B}_t$ geheel binnen $\mathcal{S}$ ligt. Het gebied $\mathcal{S}'$ tussen $\mathcal{B}_t$ en $\mathcal{S}$ voldoet weer aan de div.-stelling, bovendien is $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ in dit gebied, dus de flux door $\mathcal{S}'$ is opnieuw 0. Met (b) krijgen we nu:

$$0 = \iint_{\mathcal{S}'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint_{\mathcal{B}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - 4\pi,$$

waaruit volgt dat $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi$. (Let op: de *uitwaartse* flux door $\mathcal{B}$ is *inwaartse* flux door $\mathcal{S}'$, vandaar het minteken!)