Achtergronden van vectoranalyse

dr. Steven Wepster

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

22 januari 2018

Oudegracht 1935

Oudegracht ca. 1800

Stand van wiskunde etc ca 1800

Wiskunde:

- differentiaalvgl (gewoon en partieel) redelijk goed begrepen
- integratie, ook over lijn, oppervlak of volume
- geen vectoren: alle coördinaten uitschrijven

Verder:

- begin van industrialisatie, stoom
- nauwelijks scheidslijnen tussen de natuurwetenschappen
- geen electriciteit van betekenis
- 1820 Ørsted: koppeling magnetisme en electriciteit

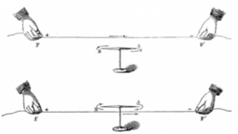
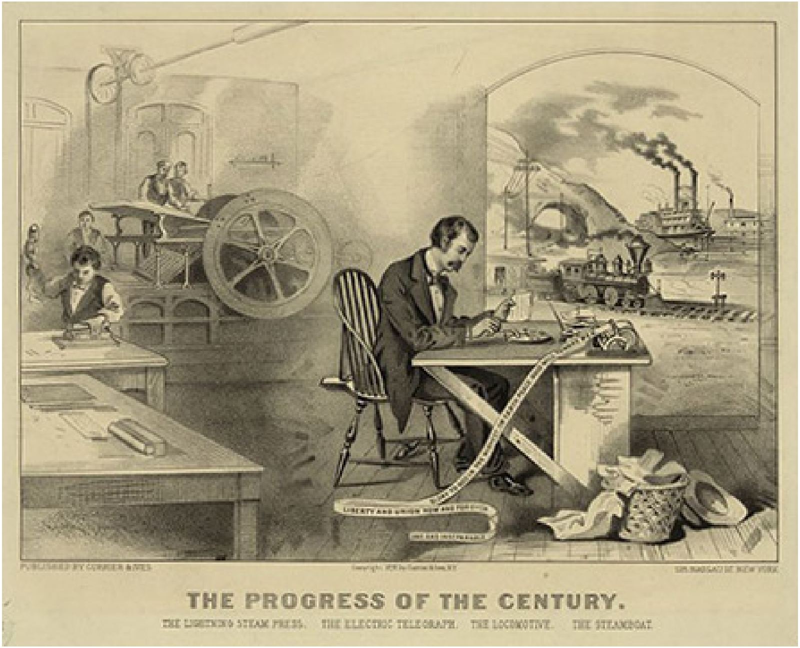


Fig. 380 et 381. — Courant magnétique.

- later: telegraaf, telefoon, licht


THE PROGRESS OF THE CENTURY.
THE LIGHTNING STEAM PRESS. THE ELECTRIC TELEGRAPH. THE LOCOMOTIVE. THE STEAMBOAT.

Integraalstellingen

Gauss, divergentie $$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} F \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S$$

Stokes $$\iint\limits_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Green $$\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\mathcal{S}} F_1 \, \mathrm{d}x + F_2 \, \mathrm{d}y$$

Naamloos $$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}s = \varphi_{\text{eind}} - \varphi_{\text{begin}}$$

Waar komen ze vandaan?

Carl Friedrich Gauss 1777–1855

Eén van de geniaalste wiskundigen ooit, o.a. veel astronomie

1813: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum*

THEOREMA SECUNDUM.

Volumen integrum corporis exprimitur per integrale $\int ds . x \cos QX$ *per totam superficiem extensum.*

Manifesto idem volumen etiam per $\int ds . y \cos QY$ vel per $\int ds . z \cos QZ$ exprimere licebit.

(Het gehele volume van het lichaam kan worden uitgedrukt met de integraal over het hele oppervlak)

Carl Friedrich Gauss 1777–1855

THEOREMA SECUNDUM.

Volumen integrum corporis exprimitur per integrale $\int \mathrm{d}s\,.\,x\cos QX$ *per totam superficiem extensum.*

Manifesto idem volumen etiam per $\int \mathrm{d}s\,.\,y\cos QY$ vel per $\int \mathrm{d}s\,.\,z\cos QZ$ exprimere licebit.

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} x\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} y\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} z\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Dit is niet algemeen, alleen voor een heel specifiek vectorveld.

Carl Friedrich Gauss 1777–1855

THEOREMA SECUNDUM.

Volumen integrum corporis exprimitur per integrale $\int \mathrm{d}s \,.\, x \cos QX$ *per totam superficiem extensum.*

Manifesto idem volumen etiam per $\int \mathrm{d}s \,.\, y \cos QY$ vel per $\int \mathrm{d}s \,.\, z \cos QZ$ exprimere licebit.

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} x\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{\imath}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} y\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{\jmath}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial\mathcal{V}} z\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\mathcal{V}} (x\hat{\mathbf{\imath}} + y\hat{\mathbf{\jmath}} + z\hat{\mathbf{k}})\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

Dit is niet algemeen, alleen voor een heel specifiek vectorveld. De *algemene* stelling en bewijs geeft Mikhail Ostrogradsky (1801–1862) een *Russische wiskundige van Ukraiense etniciteit*, in 1826, zijn studietijd in Parijs.

George Green (1793–1841)

Molenaar en autodidact, part-time wiskundige

introduceert de term *potentiaal*

1828: *Essay on the Mathematical Analysis of Electricity and Magnetism*

eigen beheer uitgave, aanvankelijk onopgemerkt

Thomson (als student, 1845) krijgt via-via het werk in handen en geeft later de naam Green's Theorem aan het volgende belangrijke resultaat:

Stelling (Green)

Let U and V be two continuous functions of the rectangular co-ordinates x, y, z, whose differential co-efficients do not become infinite at any point within a solid body of any form whatever; then will

$$\int dx\,dz\,dy\,U\delta V + \int d\sigma\,U\left(\frac{dV}{dw}\right) = \int dx\,dy\,dz\,V\delta U + \int d\sigma\,V\left(\frac{dU}{dw}\right);$$

the triple integrals extending over the whole interior of the body, and those relative to $d\sigma$, over its surface, of which $d\sigma$ represents an element: dw being an infinitely small line perpendicular to the surface, and measured from this surface towards the interior of the body.

oftewel:

$$\iiint_{\mathcal{B}} u\Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\partial\mathcal{B}} u\cdot\mathbf{n}\nabla v \mathrm{d}S = \iiint_{\mathcal{B}} v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{\partial\mathcal{B}} v\cdot\mathbf{n}\nabla u \mathrm{d}S$$

Stelling (Green)

$$\int dx\,dz\,dy\,U\delta V+\int d\sigma\,U\left(\frac{dV}{dw}\right)=\int dx\,dy\,dz\,V\delta U+\int d\sigma\,V\left(\frac{dU}{dw}\right);$$

oftewel:

$$\iiint\limits_{\mathcal{B}} u\Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\partial\mathcal{B}} u\cdot\mathbf{n}\nabla v \mathrm{d}S=\iiint\limits_{\mathcal{B}} v\Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\partial\mathcal{B}} v\cdot\mathbf{n}\nabla u \mathrm{d}S$$

of

$$\iiint\limits_{\mathcal{B}}(u\Delta v-v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\mathcal{B}}(u\cdot\mathbf{n}\nabla v-v\cdot\mathbf{n}\nabla u)\,\mathrm{d}S$$

Green ziet dit resultaat als een (fysisch relevante) relatie tussen eigenschappen in en op $\mathcal{B}$. Maar dit is niet de "Stelling van Green"!

Green of Cauchy-Riemann?

Wat we nu Green's Theorem noemen lijkt te maken te hebben met de Cauchy-Riemann vergelijkingen van complexe functietheorie: als $z = x + \mathrm{i}y$ en $f(z) = p(z) + \mathrm{i}q(z)$ dan is f complex diffbaar indien

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Green of Cauchy-Riemann?

Wat we nu Green's Theorem noemen lijkt te maken te hebben met de Cauchy-Riemann vergelijkingen van complexe functietheorie: als $z = x + \mathrm{i}y$ en $f(z) = p(z) + \mathrm{i}q(z)$ dan is f complex diffbaar indien

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Inderdaad publiceert Cauchy in 1845 Greens stelling

$$\int p(x,y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en hij belooft (later) een bewijs maar dat is er nooit gekomen. . . tot Riemann het gaf in 1850.

George Gabriel Stokes 1819–1903

Math. prof. in Cambridge, organiseert daar o.a. de *Smith Prize Exam* voor studenten. In 1854 was een van de examenopgaven:

George Gabriel Stokes 1819–1903

Math. prof. in Cambridge, organiseert daar o.a. de *Smith Prize Exam* voor studenten. In 1854 was een van de examenopgaven:

If X, Y, Z be functions of the rectangular coordinates x, y, z; dS an element of any limited surface, ℓ, m, n the cosines of the inclinations of the normal at dS to the axes, ds an element of the boundary line, shew that

$$\iint \left\{ \ell \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + m \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + n \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \right\} dS = \int \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \mathrm{d}s$$

...the single integral being taken all around the perimeter of the surface.

Herkomst van Stokes' Stelling

Stokes had de stelling (zonder bewijs) gekregen in een brief van William Thomson.

Het oudst gepubliceerde bewijs is uit 1861 (Hankel) met gebruik van Riemanns versie van Green's stelling.

Thomson publiceert later zelf ook een bewijs.

De 1854 Smith Prize werd gewonnen door de student. . .

Herkomst van Stokes' Stelling

Stokes had de stelling (zonder bewijs) gekregen in een brief van William Thomson.

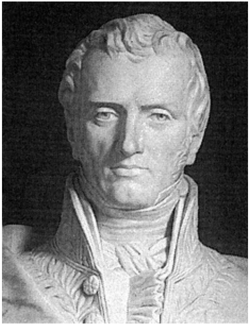
Het oudst gepubliceerde bewijs is uit 1861 (Hankel) met gebruik van Riemanns versie van Green's stelling.

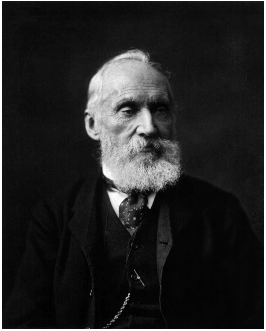
Thomson publiceert later zelf ook een bewijs.

De 1854 Smith Prize werd gewonnen door de student. . .

James Clerk Maxwell. 

Navier, Stokes, Thomson





Claude-Louis Navier (1785–1836):
Parijs, elasticiteit en stroming

George Gabriel Stokes (1819–1903):
Cambridge, *Lucasian Professor of Mathematics*

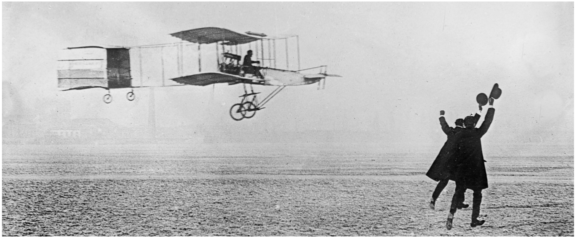
William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907):
Glasgow, mathematische fysica

Navier-Stokes vergelijking

Navier-Stokes vergelijking beschrijft het gedrag van stromende media:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

waarin ρ dichtheid, $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ advectie, $\mathbf{v}$ snelheidsveld, p druk, $\mu\Delta\mathbf{v}$ viscositeit (inw. wrijving), f externe krachten.



Navier-Stokes vergelijking

Navier-Stokes vergelijking beschrijft het gedrag van stromende media:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

waarin ρ dichtheid, $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ advectie, $\mathbf{v}$ snelheidsveld, p druk, $\mu\Delta\mathbf{v}$ viscositeit (inw. wrijving), f externe krachten.

Dit geeft een perfecte beschrijving maar...
we begrijpen de vergelijkingen niet.

Prijsvraag (Milenniumprobleem, Clay Institute): voor welke beginwaarden is dit stelsel PDV uniek oplosbaar?
Beloning 1 miljoen dollar.

Maxwells vergelijkingen

1873 A Treatise on Electricity and Magnetism

bevat Maxwell-vergelijkingen in quaternionenvorm

The scalar part is

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right), \text{ see Theorem III,}$$

and the vector part is

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right).$$

If the relation between X, Y, Z and ξ, η, ζ is that given by equation (1) of the last theorem, we may write

$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta. \quad \text{See Theorem IV.}$$

It appears therefore that the functions of X, Y, Z which occur in the two theorems are both obtained by the operation ∇ on the vector whose components are X, Y, Z. The theorems themselves may be written

$$\iiint S\nabla\sigma\, ds = \iint S\,.\,\sigma U\nu\, ds, \quad \text{(III)}$$

$$\text{and} \quad \int S\sigma\, d\rho = -\iint S\,.\,\nabla\sigma U\nu\, ds; \quad \text{(IV)}$$

William Rowan Hamilton 1805–1865, quaternions

Wist dat je met $\mathbb{C}$ meetkunde kunt doen in $\mathbb{R}^2$, bijv rotaties en spiegelingen.

Zou zoiets ook in R^3 kunnen? Met tripletten 1, i, j?

Na jaren zoeken zag hij in 1843 de oplossing:
met viertallen $s + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ lukte het indien

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

waaruit volgt

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji}, \qquad \mathrm{jk} = \mathrm{i} = -\mathrm{kj}, \qquad \mathrm{ki} = \mathrm{j} = -\mathrm{ik}.$$

Zulke viertallen noemde hij *quaternionen*.

William Rowan Hamilton 1805–1865, quaternions

Wist dat je met $\mathbb{C}$ meetkunde kunt doen in $\mathbb{R}^2$, bijv rotaties en spiegelingen.

Zou zoiets ook in R^3 kunnen? Met tripletten 1, i, j?

Na jaren zoeken zag hij in 1843 de oplossing:
met viertallen $s + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ lukte het indien

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

waaruit volgt

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji}, \qquad \mathrm{jk} = \mathrm{i} = -\mathrm{kj}, \qquad \mathrm{ki} = \mathrm{j} = -\mathrm{ik}.$$

Zulke viertallen noemde hij *quaternionen*.
Van het quaternion $\mathbf{q} = s + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ heet
s het *scalaire deel* $S\mathbf{q}$ en $x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ het *vectordeel* $V\mathbf{q}$.
Neem $\mathbf{p} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$ en $\mathbf{q} = u\mathrm{i} + v\mathrm{j} + w\mathrm{k}$ en bereken het quaternionproduct $\mathbf{pq}$ en merk iets bijzonders op.

Je ziet:
$\mathbf{pq} = -(xu + yv + zw) + (yw - zv)\mathrm{i} + (zu - xw)\mathrm{j} + (xv - yu)\mathrm{k}.$

Dus het scalaire deel $-S(\mathbf{pq})$ is ons inproduct

en het vectordeel $V(\mathbf{pq})$ is ons uitproduct.

Hamilton introduceerde ook $\nabla = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Dus:
$S\nabla\mathbf{u} = -\operatorname{div}\mathbf{u}$ en $V\nabla\mathbf{u} = \operatorname{curl}\mathbf{u}$

Hij wijdde de rest van zijn leven aan het uitwerken van de theorie en toepassingen van quaternionen in o.a. de natuurkunde.

Quaternionvormen van de integraalstellingen

$$\text{Gauss:} \qquad \iiint S\nabla\sigma \, d\zeta = \iint S\sigma U\nu \, ds$$

$$\text{Stokes:} \qquad \int S\sigma \, d\rho = -\iint S\nabla\sigma U\nu \, ds$$

waarin S scalar part, V vector part, en $U\nu$ unit normal vector.

dus nu kunnen we Maxwell lezen:

The scalar part is

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right), \text{ see Theorem III,}$$

and the vector part is

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right).$$

If the relation between X, Y, Z and ξ, η, ζ is that given by equation (1) of the last theorem, we may write

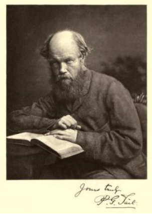
$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta. \quad \text{See Theorem IV.}$$

It appears therefore that the functions of X, Y, Z which occur in the two theorems are both obtained by the operation ∇ on the vector whose components are X, Y, Z. The theorems themselves may be written

$$\iiint S\nabla\sigma\, ds = \iint S\,.\,\sigma U\nu\, ds, \quad \text{(III)}$$

and $$\int S\sigma\, d\rho = -\iint S\,.\,\nabla\sigma U\nu\, ds; \quad \text{(IV)}$$

Tait vs. Gibbs en Heaviside



Peter Guthrie Tait 1831–1901 zet het werk van Hamilton voort, vanuit Edinburgh. Legt sterk de nadruk op fysische toepassingen, is bovendien goed bevriend met Maxwell.

Josiah Willard Gibbs 1839–1903, thermodynamica, Yale

Oliver Heaviside 1850–1925, *telegraph engineer*

Gibbs en Heaviside waren beide geïnspireerd door Maxwells *Treatise*.

Ze zagen dat je nooit het hele quaternion $\mathbf{u}$ nodig hebt maar altijd ofwel $S.\mathbf{u}$, ofwel $V.\mathbf{u}$. Dus waarom niet de quaternionen vergeten en alleen met scalairen en vectoren werken?

“uitwisseling van ideeën”

Taits 1890 reactie op Gibbs:

> *Gibbs must be ranked as one of the retarders of Quaternion progress, in virtue of his pamphlet on Vector Analysis; a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann [nl. de moderne notaties voor in- en uitproduct]*

Gibbs antwoordt 1891: quaternionen zijn kunstmatig en fysisch niet relevant, en dus

> *that the position of the quaternionist is not the only one from which the subject of vector analysis may be viewed, and a method which would be monstrous from one point of view, may be normal and inevitable from another.*

Heaviside is iets polemischer:

Heaviside schrijft in 1893 *Electromagnetic Theory*:

> *As I have [...] stated my views concerning the unsuitability of quaternions for physical requirements, and my preference for a vector algebra which is based upon the vector [...] instead of quaternionic, it is needless to say more on the point here. But I must add that it has been gratifying to discover among mathematical physicists a considerable and rapidly growing appreciation of vector algebra on these lines; and moreover, that students who had found quaternions quite hopeless could understand my vectors very well.*

Heavisides proza

Abstrusity of Quaternions and Comparative Simplicity gained by ignoring them.

I came later to see that, so far as the vector analysis I required was concerned, the quaternion was not only not required, but was a positive evil of no inconsiderable magnitude . . . The vector analysis that I use may be described either as a convenient and systematic abbreviation of Cartesian analysis; or else as Quaternions without quaternions.

Heavisides proza

Abstrusity of Quaternions and Comparative Simplicity gained by ignoring them.

I came later to see that, so far as the vector analysis I required was concerned, the quaternion was not only not required, but was a positive evil of no inconsiderable magnitude . . . The vector analysis that I use may be described either as a convenient and systematic abbreviation of Cartesian analysis; or else as Quaternions without quaternions.

"Quaternion" was, I think, defined by an American school-girl to be "an ancient religious ceremony." This was, however, a complete mistake. The ancients—unlike Prof. Tait—knew not, and did not worship Quaternions. The quaternion and its laws were discovered by that extraordinary genius Sir W. Hamilton. A quateruion is neither a scalar, nor a vector, but a sort of combination of both. It has no physical representatives, but is a highly abstract mathematical concept. It is the "operator" which turns one vector into another. It has a

Heavisides vorm van "Maxwells" vergelijkingen

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{H} = \mathbf{J} + c\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{c} \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

corresponderend met **twaalf** van in totaal 20 vergelijkingen bij Maxwell.

De Stelling zonder Naam

$$\varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}) = \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \, \mathrm{d}\mathbf{s}$$

wordt waarschijnlijk al in de 18e eeuw gebruikt (Daniel Bernoulli? Clairaut? Euler?)

Conclusies

- Integraalstellingen ontstaan bij het wiskundig beschrijven van de (3-dim) fysische werkelijkheid
- complexe getallen $\rightarrow$ quaternionen $\rightarrow$ vectoren
- $\hat{\mathbf{\imath}}$, $\hat{\mathbf{\jmath}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ herinneren nog aan Hamiltons quaternionen
- Naamgeving van de stellingen is wat problematisch