WisTech 2

toets 3, 8 jan 2018

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Voor elke deelopgave kan je 1, 0 of -1 punten halen. Laat Σ de som zijn, dan

$$\text{Cijfer} = \begin{cases} 1 & \text{als } \Sigma \in \{3,4,5\}, \\ 0 & \text{als } \Sigma \in \{0,1,2\}, \\ -1 & \text{anders.} \end{cases}$$

1. Bereken

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}V,$$

waar W de eenheidsbol is in $\mathbb{R}^3$, i.e., $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Oplossing: Mbv bolcoordinaten:

$$\begin{aligned}\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} e^{R^3}R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta \\ &= -2\pi\int_0^1 e^{R^3}R^2(\cos(\pi)-\cos(0))\,\mathrm{d}R \\ &= 4\pi\int_0^1 e^{R^3}R^2\,\mathrm{d}R.\end{aligned}$$

Substitueer $u = R^3$, $\mathrm{d}u = 3R^2\mathrm{d}R$,

$$4\pi\int_0^1 e^{R^3}R^2\,\mathrm{d}R = \frac{4}{3}\pi\int_0^1 e^u\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

2. Zij

$$I = \int_0^{\pi}\int_{\sin x}^{3\sin x}\cos x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

a. Schets de regio waarover geïntegreerd wordt.

b. Bereken I.

Oplossing:

$$I = \int_0^\pi 2\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0$$

Ook voldoende: $I = 0$ want het domein is symmetrisch in de lijn $x = \pi/2$ en de functie $\cos(x)$ is antisymmetrisch in dezelfde lijn.

3. Toon aan of geef een tegenvoorbeeld:

   a. Contourlijnen van een potentiaal staan altijd loodrecht op de veldlijnen van het bijbehoorende conservatieve veld.

   Oplossing: Dit is waar. De veldlijnen van het vectorveld staan in de richting van de gradient van het potentiaal. De gradient staat loodrecht op contourlijnen.

   b. Zij $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 < y < 1/x\}$. De integraal

   $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}A$$

   convergeert voor alle functies f van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

   $$f(x, y) < 10^{-2018} \quad \text{voor alle } (x, y) \in D.$$

   Oplossing: Dit is niet waar. Tegenvoorbeeld: $f(x, y) = 10^{-2019}$; de integraal van een constante functie over een onbegrends domein is divergent:

   $$\iint_D 10^{-2019}\,\mathrm{d}A = 10^{-2019}\iint_D \mathrm{d}A = \infty$$