Extra opgave (DVen)

Beschouw de differentiaalvergelijking (DV) die de ongedempte mathematische slinger beschrijft voor kleine hoeken x waarvoor $\sin(x) \approx x$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array} \right. \tag{1}$$

met startwaarden $x(0) = 1$ en $y(0) = 0$.

We onderzoeken vijf verschillende numerieke methoden voor deze DV:

1) Euler-Forward (EF)
2) Euler-Backward (EB)
3) Trapeziummethode (TR)
4) Symplectic-Euler (SY)
5) Störmer-Verlet (SV).

Methoden 1), 2) en 3) zijn bekend (zie diktaat). Methode 4) luidt als volgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta t\ y_n, \\ y_{n+1} = y_n - \Delta t\ x_{n+1}. \end{array} \right.$$

Schrijf een code (bijvoorbeeld in Matlab) die m.b.v. deze vijf methoden DV (1) doorrekent met stapgrootte $\Delta t = 0.1$ voor $t \in [0, T]$ met $T = 2\pi$. Bepaal de numerieke oplossing voor $t = 0.0, 0.1, 0.2, ..., T$ [1] voor deze numerieke methoden. Maak een tabel met uitkomsten voor de numerieke oplossing op $t = T$. Let er bij methoden 2) en 3) op dat je het numerieke schema eerst naar een handiger vorm herschrijft voordat je de berekeningen kunt starten.

Plot in één figuur met x op de x-as en y op de y-as (faseplaatje) zowel de numerieke oplossingen voor de genoemde tijdstippen als de exacte oplossing. Maak voor de vijf methoden in een tweede figuur een plot van de energie $E = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ als functie van de tijd op het interval $t \in [0, T]$. Uit de DV volgt dat $E' = 0$, d.w.z. E is constant in de tijd (check dit!). Geldt dit ook voor de numerieke oplossingen? Geef voor methoden 1), 2) en 3) uitdrukkingen voor E_{n+1} in termen van E_n. Neemt de 'numerieke energie' toe, af of blijft deze constant in de tijd? Geef commentaar op de kwaliteit van de verkregen oplossingen in beide figuren.

NB. Geef in beide figuren duidelijk aan welke oplossing bij welke methode hoort!

[1] $T = 2\pi$ wordt natuurlijk niet precies bereikt door $\Delta t = 0.1$ te nemen. Kies dus een geschikte $T \approx 2\pi$