Extra opgave (NLen)

Beschouw voor $k = 0, 1, 2, ...$ de volgende iteratieformule voor het vinden van nulpunten van de vergelijking $f(x) = x^2 - a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{1}{y_k}), \quad x_0 = a, \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}(y_k + \frac{1}{x_k}), \quad y_0 = 1. \end{array} \right.$$

1) Schrijf een code (bijv. in Matlab) die dit proces uitvoert. Voer enkele iteraties uit voor jouw keuze van $a > 0$. Naar welke oplossing convergeert de rij y_k? Vergelijk je resultaten met Newton-Raphson (NR) toegepast op deze vergelijking (bekijk o.a. de snelheid van convergentie, de gevoeligheid t.a.v. de keuze van x_0 bij beide methoden, etc).

Beschouw nu de 2×2-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2) Bepaal alle matrices X waarvoor $X^2 = A$ (bereken in feite $A^{\frac{1}{2}}$, de 'wortel' van een matrix A). Hoeveel oplossingen zijn er? Zie ook de uitleg hierover op de webpagina.

3) Newton-Raphson (NR) voor de matrixvergelijking $f(X) = X^2 - A = O$ met

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

luidt (vergelijk dit met NR voor de scalaire vergelijking $f(x) = x^2 - a = 0$, zie diktaat):

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}A), \quad k = 0, 1, 2, ... \\ X_0 = A. \end{array} \right.$$

Schrijf een code (bijv. in Matlab) die dit proces beschrijft en pas dit toe op de matrix A in (1). Kies zelf een geschikt aantal iteraties en maak bijv. gebruik van de Matlabfunctie *inv* voor de inverse van een matrix. Convergeert het algoritme naar een oplossing van $X^2 - A = O$?

4) Dezelfde vraag als in 3) maar nu voor een variant op NR voor niet-lineaire matrixvergelijkingen, de zogenaamde methode van Denman en Beavers (DB), d.w.z. bepaal voor $k = 0, 1, 2, ...$ X_k en Y_k uit:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + Y_k^{-1}), \quad X_0 = A, \\ Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + X_k^{-1}), \quad Y_0 = I, \end{array} \right.$$

met

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Na hoeveel iteratieslagen is de "fout" (het verschil van twee opeenvolgende oplossingen) kleiner dan een bepaalde voorgeschreven waarde TOL? (kies zelf deze TOL en een geschikte norm om dit te meten)
Plot in één figuur het numerieke convergentieproces zowel voor NR als voor DB met de iteratie-index k op de x-as en de norm van de fout (als functie van k) op de y-as.

Herhaal onderdelen 3) en 4) maar nu voor de volgende 4×4-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Welke van de twee methoden NR en/of DB levert nu betrouwbare resultaten op? In de literatuur zijn hiervoor verklaringen te geven in termen van (in)stabiliteiten in de gebruikte numerieke methode. Kijk bijv in het artikel *Newton's Method for the Matrix Square Root* door N.J. Higham in het tijdschrift *Mathematics of Computation*, V46, N174, 1986 (p. 537-549); deze staat ook als pdf op de webpagina.