FORMULES DE LOCALISATION EN COHOMOLOGIE EQUIVARIANTE

Paul-Emile PARADAN*

mars 1997

Mathematical Institute, Utrecht University
P.O. Box 80.010, 3508 TA Utrecht
Pays-Bas
e-mail: paradan@math.ruu.nl

Contents

*Recherche partiellement financée par l'Organisation Scientifique Néerlandaise (NWO).

1 Introduction

E. Witten proposa dans [25] de localiser les formes équivariantes fermées sur les points critiques du carré de l'application moment (dans le cas d'une action hamiltonienne). Cette idée est la motivation principale de ce travail. Nous développons dans cet article un procédé de localisation en cohomologie équivariante qui va nous permettre de réaliser le programme de Witten.

Soit G un groupe de Lie compact, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, opérant sur une variété M. Notons par $\mathcal{H}^*_G(M)$ la cohomologie du complexe de de Rham G-équivariant sur M. Nous considérons dans cet article des objets cohomologiques plus généraux tels que l'algèbre $\mathcal{H}^\infty_G(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, et l'espace $\mathcal{H}^{-\infty}_G(M)$ de cohomologie équivariante à coefficients généralisés qui est un module pour $\mathcal{H}^\infty_G(M)$ [11, 12, 19].

Le procédé de localisation que nous étudions dans cet article correspond à une factorisation du morphisme naturel $I : \mathcal{H}^\infty_G(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_G(M)$.

Cette factorisation apparait déjà dans la formule cohomologique d'Atiyah-Bott [2] dans le cas où le groupe G est un tore T et la variété M est compacte. Rappelons brièvement ce résultat. L'espace de cohomologie $\mathcal{H}^*_T(M)$ est un module sur l'algèbre $S(\mathfrak{t}^*)$ des fonctions polynomiales à valeurs complexes sur $\mathfrak{t}$. Notons $\mathcal{R}$ le corps de fraction de $S(\mathfrak{t}^*)$ et considérons le morphisme $I' : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$. La formule d'Atiyah-Bott correspond à la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^*_T(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I'"'] & \mathcal{H}^*_T(M^T) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R} \arrow[d, "i_*"] \\ & \mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}, \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

où M^T désigne la sous-variété des points fixes de l'action de T. Dans ce diagramme on note $i : M^T \to M$ l'inclusion canonique et i_* le morphisme "image directe" associé. Décomposons M^T en somme de composantes connexes F. Notons $\mathrm{Eul}_o(N_F) \in \mathcal{H}^*_T(F)$ la classe d'Euler équivariante du fibré normal N_F de F dans M et $\mathrm{Eul}_o(N_F)^{-1}$ son inverse dans $\mathcal{H}^*_T(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$.

Le morphisme Λ est défini par l'équation

$$\Lambda(\eta) = \sum_F i_F^*(\eta)\,\mathrm{Eul}_o(N_F)^{-1},$$

pour toute classe $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$, où $i_F^* : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}_T^*(F)$ est le morphisme de restriction à la sous-variété F.

Dans un cadre analytique $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$ est l'analogue de $\mathcal{H}_T^*(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$. Considérons l'égalité $P.\alpha = \beta$ dans $\mathcal{H}_T^*(M)$, où P est un polynôme non nul sur $\mathfrak{t}$. Dans $\mathcal{H}_T^*(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$ cette égalité devient $\alpha = \frac{1}{P} \cdot \beta$, tandis que dans $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$ elle s'écrira $\alpha = P^{-1}.\beta$, où P^{-1} désigne une fonction généralisée telle que $P^{-1}.P = 1$

Pour un groupe compact G, le morphisme $I : \mathcal{H}_G^{\infty}(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$ joue le rôle de $I' : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}_T^*(M) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)} \mathcal{R}$ défini pour un tore T.

La section 2 est consacrée à un rappel des définitions en cohomologie équivariante, et à l'introduction des classes de Thom et d'Euler équivariantes.

Dans la section 3, nous obtenons la forme générale de notre formule de localisation. Le résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 3.7 *Considérons une sous-variété compacte $\mathcal{C}$ de M qui est G-invariante, et notons $i_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to M$ l'inclusion canonique. Supposons que la sous-variété $\mathcal{C}$ vérifie les deux conditions suivantes:*
1) Il existe une 1-forme λ sur M, G-invariante, telle que $\mathcal{C} = \{m \in M \mid \langle \lambda_m, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathbf{T}_m(G.m)\}$[1].
2) Le fibré normal de $\mathcal{C}$ dans M, $N_{\mathcal{C}}$, est orienté.
Nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_G^{\infty}(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}) \arrow[d, "(i_{\mathcal{C}})_*"] \\ & \mathcal{H}_G^{-\infty}(M)\ , \end{tikzcd}$$

où $\Lambda : \mathcal{H}_G^{\infty}(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ est défini par l'équation

$$\Lambda(\eta) = i_{\mathcal{C}}^*(\eta)\,\Lambda(1_M), \quad \eta \in \mathcal{H}_G^{\infty}(M).$$

La forme $\Lambda(1_M) \in \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ vérifie $1_{\mathcal{C}} = \mathrm{Eul}_o(N_{\mathcal{C}})\,\Lambda(1_M)$, où $\mathrm{Eul}_o(N_{\mathcal{C}})$ est la classe d'Euler équivariante du fibré normal $N_{\mathcal{C}}$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons remplacé le procédé de limite de Bismut-Witten [6, 25] par une partition de l'unité en cohomologie. Nous montrerons que ce procédé de localisation implique à la fois les formules de localisation "abélienne" (d'Atiyah-Bott, Berline-Vergne) et "non-abélienne" (de Jeffrey-Kirwan-Witten).

[1] $\mathbf{T}_m(G.m)$ est l'espace tangent en m à l'orbite $G.m$.

Il sera important d'avoir une expression explicite de la classe équivariante $\Lambda(1_M)$, en fonction de λ. Nous le ferons dans les sections 5 et 6.

Si M est compacte et orientée, l'intégration $\int_M$ est une application de $\mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$ dans l'espace des fonctions généralisées G-invariantes sur $\mathfrak{g}$. Cette application envoie $\mathcal{H}_G^{\infty}(M)$ dans le sous-espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et G-invariantes de $\mathfrak{g}$.

Un corollaire immédiat à ce théorème est la formule intégrale suivante.

Corollaire 3.10 *Supposons la variété M orientée. Les orientations de M et des fibres de $N_\mathcal{C}$ déterminent une orientation de $\mathcal{C}$. Au moyen du diagramme précédent, on voit que pour tout $\eta \in \mathcal{H}_G^\infty(M)$ à support compact sur M, on a l'égalité de fonctions généralisées G-invariantes sur $\mathfrak{g}$ suivante*

$$\begin{aligned}\int_M \eta &= \int_M (i_\mathcal{C})_*(\Lambda(\eta)) \\ &= \int_\mathcal{C} \Lambda(\eta) = \int_\mathcal{C} i_\mathcal{C}^*(\eta)\Lambda(1_M)\ .\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E} \to M$ un G-fibré vectoriel réel orienté. Supposons qu'il existe un élément $\beta \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathcal{E}^\beta = M$: le champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$ engendré par β s'annule exactement sur M. Soit $G(\beta)$ le sous-groupe de G stabilisateur de β. Nous définissons dans la section 3 une forme $G(\beta)$-équivariante à coefficients généralisés $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ telle que $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}).\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E}) = 1$. Cet inverse de la classe d'Euler est dans l'esprit du procédé de *polarisation des poids* de Guillemin-Lerman-Sternberg et Guillemin-Prato [13, 14]: on "polarise" ici avec $\beta \in \mathfrak{g}$.

La forme $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ est utilisée dans les sections suivantes où nous explicitons notre procédé de localisation. Dans le cas où le groupe G est un tore tel que $\mathcal{E}^G = M$, nous montrons que la transformée de Fourier de $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ est une mesure localement polynomiale, supportée par le demi-plan $\{\xi \in \mathfrak{g}^*,\ \langle\xi,\beta\rangle > 0\}$, et à valeurs dans les classes caractéristiques du fibré $\mathcal{E}$.

Dans la section 4, nous obtenons une formulation du théorème d'Atiyah-Bott et Berline-Vergne [2, 4] dans le cadre donné par Bismut [6] comme une réalisation du Théorème 3.7.

Théorème 5.1 *Considérons l'action d'un groupe de Lie compact G sur une variété compacte M. Pour $\beta \in \mathfrak{g}$, notons M^β les points fixes du sous groupe engendré par β. Décomposons la sous-variété M^β en somme de composantes connexes F. Nous avons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^\infty_{G(\beta)}(M) \arrow[r, "\Lambda_\beta"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(M^\beta) = \oplus_F \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(F) \arrow[d, "(i_\beta)_*"] \\ & \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(M) \end{tikzcd}$$

où $i_\beta = \oplus_F i_F : M^\beta \to M$ est l'inclusion, et

$$\Lambda_\beta(\eta) = \oplus_F i_F^*(\eta)\,\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(N_F)\ ,$$

où N_F est le fibré normal de F dans M.

A la sous-section 5.2, nous appliquons ce théorème au calcul de la mesure de Duistermaat-Heckman [10] dans le cas d'une action symplectique d'un tore. Notre résultat est similaire à celui de Canas da Silva-Guillemin dans [8] (voir Théorème 2). Nous exprimons la mesure de Duistermaat-Heckman en termes de convolutions de mesures de Heaviside, et généralisons ainsi un résultat de Guillemin-Lerman-Sternberg [13].

Dans la section 6, nous utilisons notre procédé de localisation pour mettre en oeuvre l'idée de localisation de Witten dans le cas d'une action hamiltonienne [25].

Considérons un groupe compact G munie d'une action hamiltonienne sur une variété symplectique compacte (M, Ω). On note $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment. On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ d'un produit scalaire G-invariant. Soit $\mathcal{H}$ le champ de vecteurs hamiltonien associée a la fonction $\|\mu\|^2$.

Considérons en suivant Witten la 1-forme G-invariante $\lambda := (\mathcal{H}, .)_M$, où $(.,.)_M$ désigne une métrique riemannienne G-invariante sur M. On a alors

$$\begin{aligned}\{m \in M \mid \langle \lambda_m, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathbf{T}_m(G.m)\} &= \{m \in M \mid \mathcal{H}_m = 0\} \\ &= \{m \in M \mid d\|\mu\|^2_m = 0\}.\end{aligned}$$

Pour effectuer la localisation une difficulté demeure: l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\mu\|^2)$ des points critiques de la fonction $\|\mu\|^2$ *ne forme généralement pas* une sous-variété de M. Cette difficulté peut être contournée dans le cas d'une action d'un tore.

Nous supposons maintenant que le groupe G est un tore T, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, et on note $j : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}$ l'isomorphisme associé au produit scalaire sur $\mathfrak{t}^*$. L'action de T sur $\mathfrak{t}^*$ étant triviale, les applications $\mu_\varepsilon = \mu - \varepsilon$ sont encore des applications moment, et nous montrons que pour ε générique, $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$ est une sous-variété lisse de M.

Nous consacrons la première partie de cette section à l'étude de l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$. Nous introduisons une collection $\mathcal{B}$ de sous-espaces affines de $\mathfrak{t}^*$ qui va paramétrer une subdivision de cet ensemble (Définition 6.7). Pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$, notons T_Δ le sous-tore d'algèbre de Lie le sous-espace de $\mathfrak{t}$ orthogonal à la direction du sous-espace affine Δ. Notons $\mathfrak{t}_\Delta$ l'algèbre de Lie de T_Δ.

D'après [18], nous avons

Propositions 6.8, 6.9 *Les points critiques de $\|\mu_\varepsilon\|^2$ se mettent sous la forme*

$$\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2) = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}} M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta)),$$

où $\beta(\varepsilon, \Delta)$ est le projeté orthogonal de ε sur Δ. Pour ε générique, l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$ est une sous-variété de M, l'union précédente est disjointe, et le groupe T/T_Δ agit localement librement sur $C^\varepsilon_\Delta = M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$.

En appliquant notre procédé de localisation dans ce contexte nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 6.16 *Soit $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ générique. Nous avons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_T^{\infty}(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & \oplus_\Delta \mathcal{H}_T^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon) \arrow[d, "i_*"] \\ & \mathcal{H}_T^{-\infty}(M) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

où $i = \oplus_\Delta i_\Delta : \cup_\Delta C_\Delta^\varepsilon \to M$ est l'inclusion. Le morphisme Λ est défini par

$$\Lambda(\eta) = \oplus_{\Delta \in \mathcal{B}}\, i_\Delta^*(\eta)\Lambda_\Delta\ ,$$

avec $\Lambda_\Delta \in \mathcal{H}_T^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$.

La forme $\Lambda_{\mathfrak{t}^*}$ apparait déjà dans la formule de Jeffrey-Kirwan [16]: elles se placent sous l'hypothèse d'une action libre de T sur $\mu^{-1}(0)$, ce qui impose $\mathfrak{t}^* \in \mathcal{B}$.

La fin de la section 6 est consacrée à l'étude des formes à coefficients généralisés Λ_Δ.

Comme le groupe T/T_Δ agit localement librement sur la variété C_Δ^ϵ, on peut définir la V-variété quotient $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon := C_\Delta^\varepsilon \big/ T/T_\Delta$ [17]. Nous avons le morphisme de Kirwan [18] $k_\Delta : \mathcal{H}_T^{\infty}(M) \to \mathcal{H}_{T_\Delta}^{\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$, défini comme le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^{\infty}(M) \to \mathcal{H}_T^{\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$ et de l'isomorphisme de Chern-Weil $W_\Delta : \mathcal{H}_T^{\infty}(C_\Delta^\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{T_\Delta}^{\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$.

Notons $m_\Delta : \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_T^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$ l'isomorphisme compatible avec le morphisme de Chern-Weil: pour $\alpha \in \mathcal{H}_T^{\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$ et $\beta \in \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ nous avons $\alpha.m_\Delta(\beta) = m_\Delta\Big(W_\Delta(\alpha).\beta\Big)$ (voir [19], Théorème 91).

Soient $\beta_\Delta := j^{-1}(\beta(\varepsilon,\Delta) - \varepsilon) \in \mathfrak{t}_\Delta$ et N_Δ le fibré normal de M^{T_Δ} dans M restreint à C_Δ^ϵ. Notons $\mathcal{E}_\Delta = N_\Delta \big/ T/T_\Delta$ le V-fibré vectoriel T_Δ-équivariant sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$. Pour ε générique, le champ de vecteurs sur $\mathcal{E}_\Delta$ engendré par β_Δ s'annule exactement sur $\mathcal{M}_\Delta^\epsilon$. Ces données permettent de définir une forme T_Δ-équivariante fermée à coefficients généralisés sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$: $\mathrm{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta) \in \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$.

Proposition *Nous avons, dans $\mathcal{H}_T^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon)$, l'égalité*

$$i_\Delta^*(\eta)\Lambda_\Delta = m_\Delta\Big(k_\Delta(\eta)\,\mathrm{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)\Big), \quad \forall\ \eta \in \mathcal{H}_T^{\infty}(M).$$

Comme corollaire de ces résultats nous obtenons une formule intégrale qui complète l'expression obtenue par Vergne dans [23] (voir le Théorème 19).

A chaque composante connexe F de C_Δ^ε on associe le groupe $S^\Delta(F)$ qui est le stabilisateur générique de T/T_Δ sur F et on note $|S^\Delta|(F)$ son cardinal. L'application $F \to |S^\Delta|(F)$ détermine une fonction localement constante sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ qui sera notée $|S^\Delta|$.

Théorème 6.22 *Soient $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ générique et $\eta \in \mathcal{H}_T^{\infty}(M)$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t})$ à support compact, nous avons*

$$\int_{M\times\mathfrak{t}} \eta(X)\phi(X)dX = \sum_{\Delta\in\mathcal{B}} c_\Delta \int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon \times \mathfrak{t}_\Delta} \frac{1}{|S^\Delta|} k_\Delta(\eta.\phi)(X_1)\,\mathrm{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)(X_1)dX_1\ .$$

avec $c_\Delta = (2\pi \mathrm{i})^{dim \Delta} \operatorname{vol}(T/T_\Delta, dX_2)$ *et* $dX = dX_1 dX_2$ *avec* $X_1 \in \mathfrak{t}_\Delta$ *et* $X_2 \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$.

Au moyen de ce théorème et de l'étude effectuée sur la transformée de Fourier des classes $\operatorname{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)$, nous avons donné dans [21] une description du comportement asymptotique des fonctions de partition introduites par Witten [25] qui précise les résultats de Jeffrey-Kirwan [16].

Remerciements. Je suis particulièrement reconnaissant à M. Vergne pour les conseils et les encouragements qu'elle m'a prodigués depuis plusieurs années. Je la remercie aussi pour l'aide apportée dans la rédaction de ce manuscrit.

2 Cohomologie équivariante - Définitions

Les principales références pour cette section sont [3, 19, 20].

Considérons un groupe de Lie compact G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété différentielle M. On note $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des formes différentielles et d la dérivation extérieure. Soit $\mathcal{A}_{cpt}(M)$ la sous-algèbre des formes à support compact sur M. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, on note $c(\xi) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ la contraction par le champ de vecteurs ξ.

L'action de G sur M détermine un morphisme $X \to X_M$ de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des champs de vecteurs de M.

2.1 Définitions

Rappelons les différents complexes de de Rham G-équivariants sur M. Nous avons trois espaces de formes différentielles équivariantes $\mathcal{A}_G^*(M) \subset \mathcal{A}_G^\infty(M) \subset \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$, respectivement à coefficients polynomiaux, $\mathcal{C}^\infty$ et généralisés. Le modèle des formes équivariantes à coefficients polynomiaux est dû à H. Cartan, tandis que les formes équivariantes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et généralisés ont été étudiées par Berline, Duflo, Kumar et Vergne [3, 4, 12, 19]. Rappelons leurs définitions.

Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $\alpha(X)$ sur M dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $X \in \mathfrak{g}$. Nous noterons $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ formée des éléments G-invariants: ces éléments sont appelés formes équivariantes à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. Soit $S(\mathfrak{g}^*)$ l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{A}_G^*(M) := (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M))^G$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ des formes équivariantes à coefficients polynomiaux. La différentielle $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ et donnée par l'équation

$$\forall\ \alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(M), \quad (\mathcal{D}\alpha)(X) := (d - c(X_M))(\alpha(X)),\ X \in \mathfrak{g}.$$

On vérifie que $\mathcal{D}$ laisse $\mathcal{A}_G^*(M)$ stable et que $\mathcal{D}^2 = 0$ sur $\mathcal{A}_G^\infty(M)$. Les cohomologies associées à $(\mathcal{A}_G^\infty(M), \mathcal{D})$ et $(\mathcal{A}_G^*(M), \mathcal{D})$ sont appelées respectivement la cohomologie G-équivariante à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et polynomiaux de M, et sont notées respectivement $\mathcal{H}_G^\infty(M)$ et $\mathcal{H}_G^*(M)$.

L'algèbre $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ admet une sous-algèbre $\mathcal{A}_{G,cpt}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{cpt}(M))^G$, stable par rapport à la différentielle $\mathcal{D}$. La cohomologie associée à $(\mathcal{A}_{G,cpt}^\infty(M), \mathcal{D})$ est appelée la cohomologie G-équivariante à support compact $\mathcal{H}_{G,cpt}^\infty(M)$.

L'opération de localisation que nous allons développer dans la prochaine section nécessite l'utilisation des formes équivariantes à coefficients généralisés.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. C'est, par définition, l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaire continues $\mathrm{Hom}(\mathbf{m}(\mathfrak{g}), \mathcal{A}(M))$ de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\mathbf{m}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}(M)$, où $\mathbf{m}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{A}(M)$ sont munis de la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

On note $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ le sous-espace des éléments G-invariants de $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}(M))$. On a une inclusion canonique $\mathcal{A}_G^\infty(M) \subset \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ et la différentielle $\mathcal{D}$ définie sur $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ se prolonge à $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$. Soit $\{E^1, \cdots, E^r\}$ une base de $\mathfrak{g}$, alors pour tout $\eta \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ on a

$$\forall\ \phi \in \mathbf{m}(\mathfrak{g}), \quad < \mathcal{D}(\eta), \phi > := d < \eta, \phi > - \sum_{k=1}^{r} c(E_M^k) < \eta, \phi . X_k > ,$$

où $X_1, \cdots, X_r$ sont les fonctions coordonnées sur $\mathfrak{g}$. On montre que $\mathcal{D}^2 = 0$ sur $\mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ [19]. La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G^{-\infty}(M), \mathcal{D})$ est appelée la cohomologie G-équivariante à coefficients généralisés de M, et est notée $\mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$. Le sous-espace $\mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(M) = \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g}, \mathcal{A}_{cpt}(M))^G$ est stable par rapport à la différentielle $\mathcal{D}$, et on note $\mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(M)$ la cohomologie associée à $(\mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(M), \mathcal{D})$.

Si M est un point, on voit d'après la définition que $\mathcal{H}_G^*(point) = S(\mathfrak{g}^*)^G$, $\mathcal{H}_G^\infty(point) = \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ et $\mathcal{H}_G^{-\infty}(point) = \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$. L'algèbre $\mathcal{H}_G^\infty(M)$ est munie d'une structure naturelle de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$-module, tandis que l'espace $\mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$ est un module pour $\mathcal{H}_G^\infty(M)$.

L'inclusion $\mathcal{A}_G^\infty(M) \subset \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ induit en cohomologie le morphisme naturel

$$I : \mathcal{H}_G^\infty(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(M).$$

Remarque: Le morphisme I n'est pas injectif en général. A la section 5, on verra que si M est une variété munie d'une action libre d'un tore G, ce morphisme est nul.

Si $\psi : M \to N$ est une application G-équivariante entre deux G-variétés, l'image réciproque par ψ des formes différentielles sur N définit un morphisme

$$\psi^* : \mathcal{A}_G^{-\infty}(N) \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$$

qui commute avec la différentielle équivariante. On note encore par ψ^* le morphisme induit en cohomologie.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{g}$ et invariantes par G. Si M est une G-variété orientée, l'intégration sur M détermine une application

$$\begin{aligned} \int_M : \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G \\ \alpha &\longmapsto \int_M \alpha(X) , \end{aligned}$$

définie par l'équation $< \int_M \alpha(X), \phi(X)dX >:= \int_M < \alpha(X), \phi(X)dX >$, pour toute densité à support compact $\phi(X)dX$.

Cette application d'intégration envoie le sous-espace $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ dans l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{g}$ qui sont G-invariantes. On vérifie que cette opération d'intégration annule toutes les formes exactes, et détermine le morphisme $\int_M : \mathcal{H}_G^{-\infty}(M) \to \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$.

Nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_G^\infty(M) \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\int_M"'] & \mathcal{H}_G^{-\infty}(M) \arrow[d, "\int_M"'] \\ \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G \arrow[r] & \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G, \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

où le morphisme $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G \to \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{g})^G$ correspond à l'inclusion canonique. Dans le reste de cet article on se servira implicitement de la commutativité de ce diagramme qui peut se résumer par l'égalité: $\int_M \eta = \int_M I(\eta)$ pour tout $\eta \in \mathcal{H}_G^\infty(M)$.

2.2 Classes de Thom et d'Euler équivariantes

Considérons $p : \mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel réel muni de l'action d'un groupe de Lie compact G. Pour simplifier les notations, on suppose que la variété M est compacte.

Définition 2.1 *Le fibré vectoriel $p : \mathcal{E} \to M$ est dit G-orienté si les fibres de p sont orientées, avec une orientation qui varie continûment, et si l'action de G préserve l'orientation des fibres.*

Fixons une G-orientation o sur les fibres de $\mathcal{E}$. On note indifféremment p_* ou $\int_{\mathcal{E}/M}$ l'application de $\mathcal{A}_{cpt}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{A}(M)$ d'intégration le long des fibres. C'est un morphisme de $\mathcal{A}(M)$-*module à gauche*: pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ et $\eta \in \mathcal{A}_{cpt}(\mathcal{E})$

$$\int_{\mathcal{E}/M} p^*(\alpha) \wedge \eta = \alpha \wedge \int_{\mathcal{E}/M} \eta \quad .$$

Cette intégration peut être étendue aux formes équivariantes, on vérifie qu'elle commute avec la différentielle et induit un morphisme en cohomologie:

$$\int_{\mathcal{E}/M} : \mathcal{H}_{G,cpt}^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}_G^\infty(M).$$

Suposons le fibré vectoriel $\mathcal{E} \to M$ G-orienté. Il existe une seule classe $u \in \mathcal{H}_{G,cpt}^\infty(\mathcal{E})$ telle que

$$\int_{\mathcal{E}/M} u = 1_M,$$

où 1_M désigne la fonction constante égale à 1 sur M. Cette classe, notée $\mathrm{Thom}_o(\mathcal{E})$, est appelée la classe de Thom équivariante du fibré $\mathcal{E}$.

Un représentant explicite de $\mathrm{Thom}_o(\mathcal{E})$ est donné dans [20]. Notons $i : M \to \mathcal{E}$ la section nulle. La multiplication par $\mathrm{Thom}_o(\mathcal{E})$ induit l'application "image directe" i_*: $i_*(\alpha) = \mathrm{Thom}_o(\mathcal{E}) \wedge p^*(\alpha)$ de $\mathcal{H}^\infty_G(M)$ dans $\mathcal{H}^\infty_{G,cpt}(\mathcal{E})$. Puisque $\mathrm{Thom}_o(\mathcal{E})$ est à coefficients $\mathcal{C}^\infty$, on peut définir de la même façon l'application $i_* : \mathcal{H}^{-\infty}_G(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{G,cpt}(\mathcal{E})$.

Rappelons l'isomorphisme de Thom en cohomologie équivariante à coefficients $\mathcal{C}^{-\infty}$ (Proposition 11 de [19]).

Proposition 2.2 *Soit G un groupe de Lie compact et soit $p : \mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel réel G-équivariant et G-orienté sur une base M compacte. Les applications*

$$i_* : \mathcal{H}^{-\infty}_G(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{G,cpt}(\mathcal{E})$$

et

$$\int_{\mathcal{E}/M} : \mathcal{H}^{-\infty}_{G,cpt}(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}^{-\infty}_G(M) \ ,$$

sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre.

Définition 2.3 *La classe d'Euler équivariante du fibré $\mathcal{E} \to M$, notée $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})$, est par définition égale à la restriction à M de la classe de Thom équivariante:*

$$\mathrm{Eul}_{\,o}(\mathcal{E}) := i^*(\mathrm{Thom}_{\,o}(\mathcal{E})) \ .$$

On se fixe pour la suite un produit scalaire $(.,.)$ sur les fibres et une connexion euclidienne $\nabla^{\mathcal{E}}$, tous deux G-invariants. Ceci permet la construction d'un représentant explicite de $\mathrm{Eul}_{\,o}(\mathcal{E})$ (voir [3], chapitre 7).

A partir du fibré $\mathcal{E}$, on définit les fibrés $\mathrm{End}(\mathcal{E}) := \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$, $\Lambda\mathcal{E}^*$, et $\mathrm{so}(\mathcal{E})$: pour tout m dans M, $\mathrm{so}(\mathcal{E})_m := \{A \in \mathrm{End}(\mathcal{E}_m), (Ay, y) = 0 \ \forall y \in \mathcal{E}_m\}$. Les formes différentielles sur M à coefficients dans $\mathcal{E}$, $\Lambda\mathcal{E}^*$ et $\mathrm{so}(\mathcal{E})$ seront notées, respectivement, $\mathcal{A}(M, \mathcal{E})$, $\mathcal{A}(M, \Lambda\mathcal{E}^*)$ et $\mathcal{A}(M, \mathrm{so}(\mathcal{E}))$.

L'application $det_o^{1/2} : \mathcal{A}^{pair}(M, \mathrm{so}(\mathcal{E})) \to \mathcal{A}(M)$ est définie au moyen de l'intégrale de Berezin $\mathcal{T}_o : \mathcal{A}(M, \Lambda\mathcal{E}^*) \to \mathcal{A}(M)$. Considérons l'isomorphisme $j : \mathrm{so}(\mathcal{E}) \to \Lambda^2(\mathcal{E}^*)$ tel que pour tout $A \in \mathrm{so}(\mathcal{E}_m)$ et $y_1, y_2 \in \mathcal{E}_m$, $j(A)(y_1, y_2) = (Ay_1, y_2)_m$. On a alors ${det_o}^{1/2} = \mathcal{T}_o \circ \exp \circ\, j$.

On note $R^{\mathcal{E}}$ la courbure associée à la connection $\nabla^{\mathcal{E}}$. Le moment d'un élément $X \in \mathfrak{g}$ est l'endomorphisme $\mu^{\mathcal{E}}(X) \in \mathcal{A}^0(M, \mathrm{End}(\mathcal{E}))$ défini par $\mu^{\mathcal{E}}(X) = \mathcal{L}^{\mathcal{E}}(X) - \nabla^{\mathcal{E}}_{X_M}$ où $\mathcal{L}^{\mathcal{E}}(X)$ représente l'action infinitésimale de X sur $\mathcal{A}^0(M, \mathcal{E})$.

On définit la courbure équivariante du fibré $\mathcal{E}$ par l'équation $R^{\mathcal{E}}(X) = R^{\mathcal{E}} + \mu^{\mathcal{E}}(X)$. Comme le produit scalaire et la connexion sont G-invariants, on constate que l'application $X \to R^{\mathcal{E}}(X)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}(M, \mathrm{so}(\mathcal{E}))$ est G-équivariante.

Définition 2.4 *On définit la forme d'Euler équivariante par la formule*

$$\mathrm{Eul}_{\,o}(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}})(X) = det_o^{1/2}\Big(\frac{-1}{2\pi} R^{\mathcal{E}}(X)\Big).$$

C'est un élément de l'algèbre $\mathcal{A}^\infty_G(M)$ qui est $\mathcal{D}$-fermé. De plus, sa classe de cohomologie dans $\mathcal{H}^\infty_G(M)$ ne dépend pas de la connexion choisie initialement (voir [3], chapitre 7) et est égale à la classe d'Euler équivariante [20].

3 Procédé de localisation

Considérons un groupe de Lie compact G agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M. Nous développons dans cette section un procédé général de localisation en cohomologie G-équivariante.

3.1 Localisation

Considérons une 1-forme λ sur M, G-invariante et non nulle. On note $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{g}^*$ l'application G-équivariante définie par l'équation

$$\langle \Phi_\lambda(m), X\rangle = \lambda_m(X_M(m)),\ m \in M,\ X \in \mathfrak{g}\ ,$$

où $\langle .,.\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}$.

La forme équivariante $\mathcal{D}\lambda$ se met sous la forme: $\mathcal{D}\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$. Dans cette section, nous "inversons" (dans un sens qu'il reste à préciser) la forme $\mathcal{D}\lambda$, et, moyennant quelques hypothèses, nous "localisons" les formes équivariantes sur l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{m \in M,\ \Phi_\lambda(m) = 0\}\ .$$

Lemme 3.1 *Pour toute forme $\chi_{ext} \in \mathcal{A}(M)^G$ qui est nulle au voisinage de $\mathcal{C}$, les formes équivariantes $\chi_{ext}(\int_0^a \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda}dt)$ convergent lorsque $a \to +\infty$ vers une forme équivariante à coefficients généralisés $\chi_{ext}\left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda}dt\right) \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$, qui vérifie*

$$\chi_{ext}\left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda}dt\right)\mathcal{D}\lambda = \chi_{ext} \quad dans\ \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)\ . \tag{3.4}$$

Démonstration: Considérons, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ à support compact et $m \in M$, l'égalité

$$< \chi_{ext}\left(\int_0^a \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda(X)}dt\right), f(X)dX >_m = \sum_{2k\leq dim M} (-\mathrm{i})^{k-1}(d\lambda_m)^k \chi_{ext|m}\int_0^a t^k \hat{f}(-t\,\Phi_\lambda(m))dt\ ,$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f par rapport à dX. Puisque $\hat{f}$ est à décroissance rapide et que la forme χ_{ext} s'annule au voisinage de $\{\Phi_\lambda = 0\}$, la limite de l'intégrale $\chi_{ext|m}\int_0^a t^k\hat{f}(-t\,\Phi_\lambda(m))dt$ lorsque $a \to +\infty$, existe pour tout $m \in M$, et définit une forme sur M.

On constate que, pour tout $a > 0$, $\chi_{ext}\,(\int_0^a \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda}dt)\,\mathcal{D}\lambda = \chi_{ext}\,(1 - e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda})$. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on vérifie que

$$\lim_{a\to+\infty} \chi_{ext}\ e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)\ ,$$

ce qui démontre l'égalité (3.4). $\square$

Considérons un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$. Les formes différentielles à support compact dans $\mathcal{U}$ sont de manière canonique des formes différentielles sur M. On a donc une application $I_\mathcal{U} :\ \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ qui induit le morphisme

$$I_\mathcal{U} :\ \mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}_G^{-\infty}(M)\ .$$

Hypothèse 3.2 *L'ensemble $\mathcal{C}$ est une partie compacte de M.*

Soit $\chi_o \in \mathcal{C}^\infty(M)^G$ égale à 1 au voisinage de $\mathcal{C}$. Considérons la forme équivariante $p_\lambda \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ suivante:

$$p_\lambda := \chi_o + d\chi_o \Big(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \Big) \lambda \, . \tag{3.5}$$

Elle est bien définie car $d\chi_o = 0$ au voisinage de $\mathcal{C}$, et par définition on a $p_\lambda = \lim_{a\to\infty} p_\lambda^a$ avec

$$\begin{aligned} p_\lambda^a &= \chi_o + d\chi_o \Big(\int_0^a \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \Big) \lambda \\ &= \chi_o \, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda} + \mathcal{D} \left(\chi_o \Big(\int_0^a \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \Big) \lambda \right) \, . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Proposition 3.3 *1) La forme équivariante p_λ est fermée, et $p_\lambda = 1_M$ dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$, où 1_M désigne la fonction constante égale à 1 sur M. Plus précisément,*

$$p_\lambda - 1_M = \mathcal{D} \left((\chi_o - 1) \left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \right) \lambda \right) \, .$$

2) Supposons la fonction χ_o à support compact dans $\mathcal{U}$ (ce qui est possible d'après l'Hypothèse 3.2). La forme p_λ est alors à support compact dans $\mathcal{U}$, et sa classe de cohomologie dans $\mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$ ne dépend pas du choix de la fonction χ_o.

Démonstration: Les points 1) et 2) se démontrent de la même manière; toutefois pour le premier point l'Hypothèse 3.2 n'est pas utilisée.

Considérons deux fonctions χ_o et χ_o', G-invariantes, égales à 1 au voisinage de $\mathcal{C}$, et p_λ, p_λ' les formes équivariantes qui leur sont associées. La fonction $\chi_o - \chi_o'$ est nulle au voisinage de $\mathcal{C}$, ainsi, d'après le Lemme 3.1 $(\chi_o - \chi_o') \left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \right) \lambda \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ et

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} \left((\chi_o - \chi_o') \left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \right) \lambda \right) = \\ &\qquad d(\chi_o - \chi_o') \left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \right) \lambda + (\chi_o - \chi_o') \left(\int_0^\infty \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda} dt \right) \mathcal{D}(\lambda) = p_\lambda - p_\lambda' \, . \end{aligned}$$

Le point 1) est démontré en prenant $\chi_o' = 1_M$. Pour le point 2), nous choisissons des fonctions χ_o et χ_o' à support compact dans $\mathcal{U}$. Les formes p_λ et p_λ' sont dans $\mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$ et leur différence est égale à la différentielle d'une forme de $\mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$. $\Box$

Pour la suite de cette section, on désigne par χ_o une fonction G-invariante à support compact dans un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$, et on note $p_\lambda \in \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$ la forme équivariante associée. Au moyen de la forme p_λ nous définissons l'application de localisation

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{A}_G^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \\ \eta &\longmapsto \eta\, p_\lambda \, . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Comme la forme p_λ est paire et fermée, le morphisme Θ commute avec la différentielle $\mathcal{D}$ et induit donc un morphisme en cohomologie noté encore $\Theta : \mathcal{H}_G^\infty(M) \to \mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$.

Remarque 3.4 *L'égalité $p_\lambda = 1_M + \mathcal{D}(a)$ avec $a \in \mathcal{A}_G^{-\infty}(M)$ (démontrée à la Proposition 3.3) montre que pour toute forme $\eta \in \mathcal{A}_G^{\infty}(M)$ fermée et à support compact dans $\mathcal{U}$ on a $\eta p_\lambda = \eta + \mathcal{D}(\eta a)$ avec $\eta a \in \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$, c'est à dire $\Theta(\eta) = \eta$ dans $\mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$.*

Théorème 3.5 *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_G^{\infty}(M) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \arrow[d, "I_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{H}_G^{-\infty}(M) \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

est commutatif, où $I : \mathcal{H}_G^{\infty}(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$ est le morphisme naturel.

Démonstration: La commutativité du diagramme précédent vient du fait que la classe de la forme p_λ est égale à la classe de 1_M dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$: on a $I_{\mathcal{U}}(p_\lambda) = I(1_M)$, ce qui implique $I_{\mathcal{U}}(\eta p_\lambda) = I(\eta)$ pour toute classe $\eta \in \mathcal{H}_G^{\infty}(M)$. $\square$

Au moyen d'hypothèses supplémentaires sur λ, nous allons préciser le diagramme (3.8).

Hypothèse 3.6 *L'ensemble $\mathcal{C}$ est une sous-variété compacte de M telle que les fibres du fibré normal $N_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ dans M soient G-orientées.*

Dans ce cas, quitte à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer l'existence d'un voisinage G-invariant $\mathcal{V}$ de la section nulle dans $N_{\mathcal{C}}$, et d'un isomorphisme G-invariant $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, tel que

$$\psi(m, 0) = m \text{ pour } m \in \mathcal{C}$$

L'isomorphisme ψ détermine un isomorphisme au niveau des formes équivariantes

$$\psi^* : \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{V}) .$$

Les fibres de $N_{\mathcal{C}}$ étant orientées, l'application $\int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}}$ d'intégration le long des fibres

$$\int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}} : \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(N_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$$

induit un isomorphisme en cohomologie (cf. Proposition 2.2). En particulier, si $s : \mathcal{C} \to N_{\mathcal{C}}$ est la section nulle, pour toutes formes $\alpha \in \mathcal{A}_G^{\infty}(N_{\mathcal{C}})$ et $\beta \in \mathcal{A}_{G,cpt}^{-\infty}(N_{\mathcal{C}})$, *fermées*, on a dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ l'égalité

$$\int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}} \alpha\beta = s^*(\alpha) \int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}} \beta . \tag{3.9}$$

Notons $\Lambda = \int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}} \circ \psi^* \circ \Theta$ le morphisme de $\mathcal{A}_G^\infty(M)$ dans $\mathcal{A}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$. Il commute avec la dérivation, et on notera encore

$$\Lambda : \mathcal{H}_G^\infty(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$$

le morphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})^G$-modules.

Soit $i_\mathcal{C} : \mathcal{C} \to M$ l'inclusion canonique et $i_\mathcal{C}^* : \mathcal{H}_G^\infty(M) \to \mathcal{H}_G^\infty(\mathcal{C})$ le morphisme d'algèbres associé. L'espace $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ est munie d'une structure de $\mathcal{H}_G^\infty(M)$-module à gauche en posant pour $\alpha \in \mathcal{H}_G^\infty(M)$ et $\beta \in \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$: $\alpha \times \beta := i_\mathcal{C}^*(\alpha) \wedge \beta$.

Considérons la classe de Thom équivariante $\mathrm{Thom}_o(N_\mathcal{C}) \in \mathcal{H}_{G,cpt}^\infty(N_\mathcal{C})$ associée à l'orientation o des fibres $N_\mathcal{C}$, et à support dans $\mathcal{V}$. Nous noterons encore $\mathrm{Thom}_o(N_\mathcal{C})$ la classe $(\psi^{-1})^*(\mathrm{Thom}_o(N_\mathcal{C})) \in \mathcal{H}_{G,cpt}^\infty(\mathcal{U})$. Cette classe réalise le morphisme "image directe" $(i_\mathcal{C})_* : \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(M), \eta \mapsto I_\mathcal{U}(\eta\, \mathrm{Thom}_o(N_\mathcal{C}))$.

Nous pouvons préciser le diagramme (3.8) par le

Théorème 3.7 *1) Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_G^\infty(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}) \arrow[d, "(i_\mathcal{C})_*"] \\ & \mathcal{H}_G^{-\infty}(M) \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

est commutatif.

2) Le morphisme $\Lambda : \mathcal{H}_G^\infty(M) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ est un morphisme de $\mathcal{H}_G^\infty(M)$-module, ou dit autrement

$$\Lambda(\eta) = i_\mathcal{C}^*(\eta)\, \Lambda(1_M) \tag{3.11}$$

pour tout $\eta \in \mathcal{H}_G^\infty(M)$. La classe $\Lambda(1_M) \in \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$ vérifie

$$1_\mathcal{C} = \mathrm{Eul}_o(N_\mathcal{C})\, \Lambda(1_M)\ . \tag{3.12}$$

où $\mathrm{Eul}_o(N_\mathcal{C})$ est la classe d'Euler équivariante du G-fibré vectoriel orienté $N_\mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

Démonstration: Le diagramme (3.10) est une modification du diagramme (3.8) au moyen de l'isomorphisme $\int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}} \circ \psi^* : \mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C})$: la commutativité du premier entraine celle du second. L'isomorphisme de Thom

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U}) \\ \eta & \longmapsto & \eta.\, \mathrm{Thom}_o(N_\mathcal{C}) \end{array}$$

est l'inverse du précédent isomorphisme. On voit finalement que $I_\mathcal{U} \circ (\int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}} \circ \psi^*)^{-1} = (i_\mathcal{C})_*$. Le point 1) est ainsi démontré.

L'égalité (3.9) donne immédiatement (3.11). Appliquons l'égalité (3.11) à la classe de Thom. Cette classe étant à support compact, on sait d'après la Remarque 3.4 que $\Theta(\mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}})) = \mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}})$, ce qui entraine

$$\int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}} \mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}}) = i_{\mathcal{C}}^*(\mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}}))\,\Lambda(1_M)\ .$$

L'égalité (3.12) est démontrée car par définition $\int_{N_{\mathcal{C}}/\mathcal{C}} \mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{C}}$ et $i_{\mathcal{C}}^*(\mathrm{Thom}_o(N_{\mathcal{C}})) = \mathrm{Eul}_o(N_{\mathcal{C}})$. $\square$

Remarque 3.8 *Pour ce théorème, on peut remplacer l'hypothèse de compacité de la sous-variété $\mathcal{C}$ par celle de l'existence d'un voisinage tubulaire G-invariant de $\mathcal{C}$ dans M.*

Remarque 3.9 *L'égalité $1_{\mathcal{C}} = \mathrm{Eul}_o(N_{\mathcal{C}})\,\Lambda(1_M)$ peut être triviale dans certain cas. Par exemple, si la classe d'Euler est nulle sur une composante connexe $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$, ceci implique que la classe $1_{\mathcal{C}_i} = 0$ dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}_i)$, ou dit autrement que le morphisme canonique $\mathcal{H}_G^{\infty}(\mathcal{C}_i) \to \mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathcal{C}_i)$ est nul.*

Corollaire 3.10 *Supposons la variété M orientée. Les orientations de M et des fibres de $N_{\mathcal{C}}$ déterminent une orientation de $\mathcal{C}$. Au moyen du diagramme (3.10), on voit que pour toute forme fermée $\eta \in \mathcal{A}_G^{\infty}(M)$ à support compact, on a l'égalité de fonctions généralisées G-invariantes sur $\mathfrak{g}$ suivante*

$$\begin{aligned} \int_M \eta &= \int_M (i_{\mathcal{C}})_*(\Lambda(\eta)) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \Lambda(\eta) = \int_{\mathcal{C}} i_{\mathcal{C}}^*(\eta)\Lambda(1_M)\ . \end{aligned}$$

3.2 Calcul de la forme $\Lambda(1_M)$

Considérons deux 1-formes λ_0 et λ_1, G-invariantes sur M, telles que $\mathcal{C} = \{\Phi_{\lambda_0} = 0\} = \{\Phi_{\lambda_1} = 0\}$, avec $\mathcal{C}$ compact. Soient $\mathcal{U}$ un voisinage de $\mathcal{C}$ et $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(M)^G$ à support compact dans $\mathcal{U}$, égale à 1 au voisinage de $\mathcal{C}$. Notons p_{λ_0}, p_{λ_1} les formes équivariantes associées à ces données (cf. égalité (3.5)).

Proposition 3.11 *Supposons qu'il existe une application $\mathrm{f} : M \to \mathfrak{g}$ telle que les fonctions $\langle \Phi_{\lambda_0}, \mathrm{f}\rangle$ et $\langle \Phi_{\lambda_1}, \mathrm{f}\rangle$ soient* strictement positives *sur $M - \mathcal{C}$. Alors*

$$p_{\lambda_0} = p_{\lambda_1}$$

dans $\mathcal{H}_{G,cpt}^{-\infty}(\mathcal{U})$. Les localisations définies au moyen de λ_0 et λ_1 sont donc identiques.

Démonstration: Posons pour $u \in [0,1]$, $\lambda_u := u\lambda_1 + (1-u)\lambda_0$: on a $\Phi_{\lambda_u} = u\Phi_{\lambda_1} + (1-u)\Phi_{\lambda_0}$. La fonction f permet de s'assurer que pour tout $u \in [0,1]$, $\{\Phi_{\lambda_u} = 0\} = \mathcal{C}$. On peut donc définir les formes $p_{\lambda_u} := \chi + d\chi\Big(\int_0^\infty \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt\Big)\lambda_u$ et on vérifie que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{\lambda_u}}{\partial u} &= d\chi\Big(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt\Big)\mathcal{D}(\lambda_1-\lambda_0)\lambda_u + d\chi\Big(\int_0^\infty \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt\Big)(\lambda_1-\lambda_0)\\
&= \mathcal{D}\left(d\chi\Big(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt\Big)\lambda_0\lambda_1\right)\ ,
\end{aligned}\tag{3.13}$$

puisque d'une part $\mathcal{D}\left(-d\chi(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt)(\lambda_1-\lambda_0)\lambda_u\right) = d\chi(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt)\mathcal{D}(\lambda_1-\lambda_0)\lambda_u$ $-d\chi(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt)\mathcal{D}\lambda_u(\lambda_1-\lambda_0)$, d'autre part $d\chi(\int_0^\infty t\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt)\mathcal{D}\lambda_u = -d\chi(\int_0^\infty \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_u}dt)$ et $-(\lambda_1-\lambda_0)\lambda_u = \lambda_0\lambda_1$.

En intégrant l'égalité (3.13) sur $[0,1]$, on trouve $p_{\lambda_1} - p_{\lambda_0} = \mathcal{D}(\delta)$, avec $\delta \in \mathcal{A}^{-\infty}_{G,cpt}(\mathcal{U})$. □

Dans les sections 5 et 6, nous modifions la forme λ au voisinage de la sous-variété $\mathcal{C}$ en une forme λ_{mod}, de telle façon que les conditions de la Proposition 3.11 soient vérifiées. La localisation effectuée avec λ_{mod} est donc identique à celle effectuée avec λ, mais a l'avantage de simplifier le calcul de la forme $\Lambda(1_M)$.

Plaçons nous dans les conditions du Théorème 3.7. Par définition du morphisme Λ, la forme $\Lambda(1_M) \in \mathcal{H}^{-\infty}_G(\mathcal{C})$ est définie par l'égalité:

$$\Lambda(1_M) = \int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}} p_\lambda\ .$$

D'après (3.6) on a $\Lambda(1_M) = \lim_{a\to+\infty}\Lambda_a$, avec pour $a > 0$

$$\Lambda_a = \int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}} \chi\, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda'} + \mathcal{D}\left(\int_0^a \mathrm{i}\Big(\int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}}\chi\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda'}\lambda'\Big)dt\right)\ ,$$

où la fonction χ est à support compact, égale à 1 au voisinage de la section nulle, et λ' est une 1-forme sur $N_\mathcal{C}$ égale à $\psi^*(\lambda)$ sur le support de χ.

Dans les sections 5 et 6, nous verrons qu'après modification de λ en λ_{mod} les formes $\int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}}\chi\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda'}\lambda'$ sont *nulles* pour tout $t > 0$. On aura alors une expression simple de la forme à coefficients généralisés $\Lambda(1_M)$:

$$\Lambda(1_M) = \lim_{a\to+\infty}\int_{N_\mathcal{C}/\mathcal{C}}\chi\, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda'}\ .$$

3.3 Exemples

Exemple 1: Considérons un groupe de Lie G compact agissant sur une variété compacte M. Soient $\beta \in \mathfrak{g}$ et $G(\beta)$ le sous-groupe de G stabilisateur de β. Munissons la variété M d'une métrique riemannienne $(.,.)_M$ G-invariante.

Considérons la 1-forme $\lambda_\beta := (\beta_M, .)_M$, où β_M désigne le champ de vecteurs sur M engendré par β. On a donc $\lambda \in \mathcal{A}^1(M)^{G(\beta)}$, et on vérifie que

$$\{\Phi_{\lambda_\beta} = 0\} = \ M^\beta \ ,$$

où M^β désigne la sous-variété des points où le champ de vecteurs β_M s'annule. Nous verrons à la section 5 que dans ce cas le Théorème 3.7 est une généralisation de la formule d'Atiyah-Bott et Berline-Vergne dans le cadre donné par Bismut [6].

Exemple 2: Considérons l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact G sur une variété symplectique (M, Ω). On note $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ l'application moment associée. On munit l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ d'un produit scalaire G-invariant. Soit $\mathcal{H}$ le champ de vecteurs hamiltonien associée a la fonction $\|\mu\|^2$.

Considérons en suivant Witten [25] la 1-forme G-invariante $\lambda := (\mathcal{H}, .)_M$, où $(.,.)_M$ désigne une métrique riemannienne G-invariante sur M. On a alors

$$\{\Phi_\lambda = 0\} = \{\mathcal{H} = 0\} = \mathrm{Cr}(\|\mu\|^2) \ .$$

Pour effectuer la localisation dans ce cas une difficulté demeure: les points critiques de $\|\mu\|^2$ *ne forment généralement pas* une sous-variété de M. Dans la section 6, nous pourrons effectuer la localisation lorsque l'on se restreint à l'action d'un tore sur une variété symplectique compacte.

Voici un exemple d'action hamiltonienne d'un groupe compact *non-abélien* où les points critiques de $\|\mu\|^2$ forment une sous-variété.

Considérons un groupe de Lie semi-simple G de centre fini, et K un sous-groupe compact maximal. Soit M une orbite coadjointe semi-simple de G munie de la structure symplectique canonique (l'action de K sur M est alors hamiltonienne). Notons $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ l'application moment et considérons le produit scalaire K-invariant sur $\mathfrak{k}$ défini comme la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Nous avons

$$\mathrm{Cr}(\|\mu\|^2) = M \cap \mathfrak{k}^* \ ,$$

et ce dernier ensemble est une K-orbite.

Soit F_M la transformée de Fourier de la G-orbite M: c'est une fonction généralisée G-invariante sur $\mathfrak{g}$ qui admet une restriction à $\mathfrak{k}$ qui s'écrit $F_M|_{\mathfrak{k}}(X) = \int_M e^{i\Omega_{\mathfrak{k}}(X)}$, où $\Omega_{\mathfrak{k}}$ est la 2-forme symplectique équivariante [11]. Duflo et Vergne montrent que la fonction généralisée $F_M|_{\mathfrak{k}}$ s'exprime comme l'intégrale sur $M \cap \mathfrak{k}^*$ d'une forme K-équivariante à coefficients généralisés. Si $i : M \cap \mathfrak{k}^* \to M$ est l'inclusion canonique, on a

$$F_M|_{\mathfrak{k}}(X) = \int_{M \cap \mathfrak{k}^*} i_*\left(e^{i\Omega_{\mathfrak{k}}}\right) \Lambda \ ,$$

avec $\Lambda \in \mathcal{H}_K^{-\infty}(M \cap \mathfrak{k}^*)$ qui est un inverse de la classe d'Euler équivariante du fibré normal de $M \cap \mathfrak{k}^*$ dans M.

En fait, ce calcul correspond exactement à une formule intégrale provenant de la localisation dans le cadre symplectique. Le Corollaire 3.10 permet de retrouver l'expression de $F_M|_{\mathfrak{k}}$ donnée par Duflo et Vergne (avec quelques modifications car le support de la forme $e^{i\Omega_{\mathfrak{k}}}$ n'est pas compact).

4 Inversion de la classe d'Euler équivariante

Soit $\mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel réel muni d'une action d'un groupe de Lie compact G, d'algèbre de lie $\mathfrak{g}$. La variété M est supposée compacte et connexe et le fibré $\mathcal{E}$ G-orienté.

On fait l'hypothèse suivante:

Hypothèse 4.1 *Il existe un élément* $\beta \in \mathfrak{g}$ *tel que* $\{v \in \mathcal{E} \mid \beta_{\mathcal{E}}|_v = 0\} = M$.

On note $G(\beta)$ le sous-groupe de G stabilisateur de β et $\mathfrak{g}(\beta)$ son algèbre de Lie.

Nous introduisons dans cette section la classe $G(\beta)$-équivariante $\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})$ qui est un inverse, au sens généralisé, de la classe d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})$. En fait, l'inversion se fait directement au niveau des formes équivariantes (sans passer à la cohomologie).

Supposons que le groupe G est un tore tel que $\mathcal{E}^G = M$. Nous montrons alors (Proposition 4.8) que la transformée de Fourier de $\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})$ est une mesure localement polynomiale, supportée par le demi-plan $\{\xi \in \mathfrak{g}^*,\ \langle \xi, \beta \rangle > 0\}$, et à valeurs dans les classes caractéristiques du fibré $\mathcal{E}$.

Nous verrons dans les sections 5 et 6 comment cette classe intervient naturellement dans les formules de localisation en cohomologie équivariante.

4.1 Inversion de la forme d'Euler équivariante

On se fixe pour la suite un produit scalaire $(.,.)$ sur les fibres et une connexion euclidienne $\nabla^{\mathcal{E}}$, tous deux G-invariants. Pour simplifier les notations on note de la même façon la *forme* d'Euler équivariante définie au moyen de la connexion $\nabla^{\mathcal{E}}$, et la *classe* d'Euler équivariante: $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X)$.

Dans le reste de cette section, on désignera par $\mathcal{A}_{dec.rap.}(\mathcal{E})$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ des formes qui sont à décroissance rapide dans la direction des fibres.

La forme $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X)$ est une forme différentielle équivariante sur M dont la composante de degré 0 est égale à $det_0^{1/2}(\frac{-1}{2\pi}\mu^{\mathcal{E}}(X))$. Considérons l'ouvert $\mathcal{U}_M \subset \mathfrak{g}$ défini par:

$$\mathcal{U}_M = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \forall m \in M\ det(\mu^{\mathcal{E}}(X))_m \neq 0\} \quad . \tag{4.14}$$

L'application $X \longmapsto \mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X)^{-1}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}_M$, à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. On se propose d'expliciter cette inversion au moyen d'une intégration le long des fibres de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{U}_\beta$ la composante connexe de $\mathcal{U}_M \cap \mathfrak{g}(\beta)$ contenant β. Pour tout $X \in \mathcal{U}_\beta$, l'endomorphisme $\mu^{\mathcal{E}}(X)$ commute avec $\mu^{\mathcal{E}}(\beta)$ et la forme quadratique $y \to (\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y, \mu^{\mathcal{E}}(X).y)$ est définie positive sur les fibres de $\mathcal{E}$.

La connexion $\nabla^{\mathcal{E}}$ détermine une décomposition de l'espace tangent $\mathbf{T}\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus H\mathcal{E}$ en espace tangent vertical et espace tangent horizontal. Le fibré $V\mathcal{E}$ est isomorphe au fibré $p^*\mathcal{E}$, image réciproque du fibré $\mathcal{E}$ à travers la projection $p : \mathcal{E} \to M$: pour tout élément v de

$\mathcal{E}$, $V_v\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{E}_{p(v)}$. La connexion $\nabla^{\mathcal{E}}$ se relève en une connexion $\nabla^{p^*\mathcal{E}}$ sur le fibré $p^*\mathcal{E}$.

Soit $\mathbf{y}$ la section tautologique du fibré $p^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. La projection ${}^V : \mathbf{T}\mathcal{E} \to V\mathcal{E}$ déterminée au moyen de la décomposition $\mathbf{T}\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus H\mathcal{E}$ vérifie l'équation:

$$\forall\ Z \in \mathbf{T}\mathcal{E}, \quad Z^V = \nabla_Z^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}\ .$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, la partie verticale du champ de vecteurs $X_{\mathcal{E}}$ vérifie l'équation:

$$X_{\mathcal{E}}(y)^V = -\mu^{\mathcal{E}}(X)_m.y\ ,\ \textit{pour tout}\ y \in \mathcal{E}_m\ .$$

Pour "inverser" la forme d'Euler sur $\mathcal{U}_\beta$, nous avons besoin de la formule intégrale suivante.

Soit V un espace euclidien orienté. On considère $A, B \in so(V)$ *et* $R \in so(V) \otimes \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est une algèbre commutative nilpotente: $\mathfrak{a}^n = 0$ pour "n" assez grand. On suppose de plus que B et R commutent avec A et que $y \to (Ay, By)$ est définie positive. L'espace V est donc de dimension paire et le calcul d'une gaussienne donne

$$\int_V e^{-(Ay,(B+R)y)}\, dy \;=\; \frac{(\pi)^{\frac{dimV}{2}}}{det_o^{1/2}(A)det_o^{1/2}(B+R)}\quad , \tag{4.15}$$

où dy correspond à la mesure euclidienne sur V.

Définition 4.2 *On désigne par θ_β la 1-forme $G(\beta)$-invariante sur $\mathcal{E}$ suivante : pour tout champ de vecteurs Z sur $\mathcal{E}$, $\theta_\beta(Z) = (\beta_{\mathcal{E}}, Z^V)$.*

L'expression

$$\theta_\beta = -(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y}, \nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}) \tag{4.16}$$

permet de voir que la forme θ_β a une dépendance quadratique le long de la fibre. Comme la 1-forme θ_β est $G(\beta)$-invariante, la forme $\mathcal{D}\theta_\beta \in \mathcal{A}^\infty_{G(\beta)}(M)$ est une forme équivariante fermée sur $\mathcal{E}$ définie par l'équation:

$$\mathcal{D}\theta_\beta(X) = -(\mu^{\mathcal{E}}(\beta)(\nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}), \nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}) - (\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y}, \mu^{\mathcal{E}}(X).\mathbf{y} + R^{\mathcal{E}}.\mathbf{y}), \quad X \in \mathfrak{g}(\beta),$$

où $R^{\mathcal{E}} = (\nabla^{\mathcal{E}})^2$ est la courbure du fibré $\mathcal{E}$. Dans ces formules les "fonctions" $\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y}$, $\mu^{\mathcal{E}}(X).\mathbf{y}$ sont des éléments de $\mathcal{A}^0(\mathcal{E}, p^*\mathcal{E})$ tandis que les "formes" $\mu^{\mathcal{E}}(\beta)(\nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y})$, $\nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}$ appartiennent à $\mathcal{A}^1(\mathcal{E}, p^*\mathcal{E})$ et $R^{\mathcal{E}}.\mathbf{y} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{E}, p^*\mathcal{E})$.

L'équation (4.15) nous permet d'avoir, sur $\mathcal{U}_\beta$, une formule intégrale pour l'inverse de la classe d'Euler.

Proposition 4.3 *Pour tout $X \in \mathcal{U}_\beta$, la forme $e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)} \in \mathcal{A}_{dec.rap.}(\mathcal{E})$ et*

$$\int_{\mathcal{E}/M} e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)} = \frac{1}{\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X)}\quad . \tag{4.17}$$

Démonstration: pour tout X dans $\mathcal{U}_\beta$, la fonction $-(\mu_{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y},\mu_{\mathcal{E}}(X).\mathbf{y})$ est, au niveau des fibres de $\mathcal{E}$, une forme quadratique définie négative. Comme la forme $e^{d\theta_\beta}$ possède un comportement polynomial sur les fibres, on voit que la forme $e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)}=e^{d\theta_\beta}e^{-(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y},\mu^{\mathcal{E}}(X).\mathbf{y})}$ appartient à $\mathcal{A}_{dec.rap.}(\mathcal{E})$.

Au voisinage d'un point m de M, on peut trouver une trivialisation de $\mathcal{E}$, orthonormée, dans laquelle $\nabla^{\mathcal{E}}=d+\Theta$ et telle que la 1-forme de connexion Θ s'annule en m. Dans ce cas, pour y dans $\mathcal{E}_m$:

$$\mathcal{D}\theta_\beta(X)(y)=-(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).dy,dy)-(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(X).y+R^{\mathcal{E}}.y)\quad .$$

Après avoir exponentié le terme $\mathcal{D}\theta_\beta(X)(y)$, on ne garde (pour l'intégration sur la fibre) que la composante $\left(e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)(y)}\right)_{max}$ de degré <u>maximum sur les fibres</u> :

$$\forall y\in\mathcal{E}_m,\quad \left(e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)(y)}\right)_{max}=(-2)^p det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))\,e^{-(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(X).y+R^{\mathcal{E}}.y)}\,dy_1\cdots dy_{2p},$$

où $dy_1\cdots dy_{2p}$ représente la forme volume euclidienne sur la fibre $\mathcal{E}_m$. En utilisant l'égalité (4.15), on trouve:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathcal{E}/M}e^{\mathcal{D}\theta_\beta(X)}\right)_m &= (-2)^p det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))\int_{\mathcal{E}_m}e^{-(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(X).y+R^{\mathcal{E}}.y)}\,dy_1\cdots dy_{2p}\\ &= \frac{(-2\pi)^p}{det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(X)+R^{\mathcal{E}})_m}\quad .\end{aligned}$$

□

Remarque 4.4 *On vérifie aisément que, pour tout nombre complexe z, la forme $e^{z\,\mathcal{D}\theta_\beta}\theta_\beta$ n'a pas de composantes de degré maximum dans la direction des fibres:*

$$\left(e^{z\,\mathcal{D}\theta_\beta}\theta_\beta\right)_{max}=0\ .$$

4.2 Inversion de la forme d'Euler équivariante dans $\mathcal{A}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)$

Nous reprenons les notations de la section précédente. Dans les sous-sections qui suivent la compacité de M n'est pas requise (sauf pour le Corollaire 4.7). La forme d'Euler qui initialement est une forme G-équivariante, est ici restreinte au groupe $G(\beta)$: $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})\in\mathcal{A}^{\infty}_{G(\beta)}(M)$, et nous déterminons un inverse de cette forme dans $\mathcal{A}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)$.

Définition 4.5 *On note $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ la forme de $\mathcal{A}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)$ définie par*

$$\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})=\int_{\mathcal{E}/M}e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_\beta}\quad .$$

La forme équivariante $\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})$ vérifie: $\forall\ \phi(X)dX \in \mathbf{m}(\mathfrak{g}(\beta))$

$$< \mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E}), \phi(X)dX >= \int_{\mathcal{E}/M} e^{-\mathrm{i}d\theta_\beta}\Big(\int_{\mathfrak{g}(\beta)} e^{\mathrm{i}\theta_\beta(X_{\mathcal{E}})}\phi(X)dX \Big) \ .$$

En explicitant, on voit que

$$< \mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E}), \phi(X)dX >= \int_{\mathcal{E}/M} e^{-\mathrm{i}d\theta_\beta(y)}\hat{\phi}\left(-\sum_{k=1}^{l} a^k(y)E_k \right), \tag{4.18}$$

où les fonctions $a^k(y) = (\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y, \mu^{\mathcal{E}}(E^k).y),\ y \in \mathcal{E}$ sont définies après le choix d'une base $(E^1, \cdots, E^l)$ de $\mathfrak{g}(\beta)$ telle que $dX = dX_1 ... dX_l$, et où $\hat{\phi}$ désigne la transformée de Fourier de ϕ sur $\mathfrak{g}(\beta)$ par rapport à la mesure dX.

Si $\beta = \sum_i \beta_i E^i$, on voit que $\sum_i |a^i(y)| \geq c.(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y, \mu^{\mathcal{E}}(\beta).y)$ avec $c = (\sup_i(|\beta_i|))^{-1}$. Cette minoration assure la convergence de l'intégrale (4.18).

De manière générale, on a les relations de commutations suivantes sur $\mathcal{A}_{dec.rap}(\mathcal{E})$: $d_M \circ \int_{\mathcal{E}/M} = \int_{\mathcal{E}/M} \circ\, d_{\mathcal{E}}$ et pour tout X de $\mathfrak{g}(\beta)$, $c(X_M) \circ \int_{\mathcal{E}/M} = \int_{\mathcal{E}/M} \circ\, c(X_{\mathcal{E}})$. La forme $\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}$-fermée car

$$\mathcal{D}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})) = \int_{\mathcal{E}/M} \mathcal{D}(e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_\beta}) = 0 \ .$$

Pour étudier cette forme généralisée, on considère les applications paramétrées par $s > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \psi_s : \mathfrak{g}(\beta) & \longrightarrow & \mathcal{A}(M) \\ X & \longmapsto & \int_{\mathcal{E}/M} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_\beta(X+\mathrm{i}s\beta)} \end{array} \ .$$

La convergence est assurée par le terme en β:

$$-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_\beta(X + \mathrm{i}s\beta) = \mathrm{i}\left(\mu^{\mathcal{E}}(\beta)(\nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y}), \nabla^{p^*\mathcal{E}}\mathbf{y} \right) - \left(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y}\, ,\ s\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y} - \mathrm{i}(R^{\mathcal{E}} + \mu^{\mathcal{E}}(X)).\mathbf{y} \right) \ .$$

Chaque forme $\psi_s \in \mathcal{A}^{\infty}_{G(\beta)}(M) \subset \mathcal{A}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)$, et on vérifie facilement que

$$\lim_{s\to 0^+} \psi_s = \mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})$$

en tant qu'applications généralisées sur $\mathfrak{g}(\beta)$. D'autre part, un calcul identique à celui de la Proposition 4.3 donne:

$$\begin{array}{rcl} \forall\ X \in \mathfrak{g}(\beta),\ \psi_s(X) & = & \dfrac{(2\pi \mathrm{i})^p}{det_o^{1/2}(s\mu^{\mathcal{E}}(\beta) - \mathrm{i}(\mu^{\mathcal{E}}(X) + R^{\mathcal{E}}))} \\ & = & \dfrac{1}{\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X + \mathrm{i}s\beta)} \ . \end{array}$$

Proposition 4.6 *Soit* $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ *la forme équivariante fermée de* $\mathcal{A}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)$ *introduite à la Définition 4.5. Elle vérifie*

$$\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})(X) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X + \mathrm{i}s\beta)},$$

ce qui implique

$$\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})\,.\,\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}) = 1_M \ ,$$

où on désigne encore par $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})$ *la restriction de la forme d'Euler G-équivariante à une forme* $G(\beta)$*-équivariante, et* 1_M *est la fonction constante égale à* 1 *sur* M*.*

Nous avons remarqué au début de cette section que la forme $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}^\infty_G(M)$ est inversible sur l'ouvert $\mathcal{U}_M$ lorsque la variété M est compacte. On obtient donc le

Corollaire 4.7 *Supposons* M *compacte. La forme équivariante* $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'ouvert* $\mathcal{U}_M \cap \mathfrak{g}(\beta)$ *et*

$$\forall X \in \mathcal{U}_M \cap \mathfrak{g}(\beta), \quad \mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})(X) = \frac{1}{\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X)} \ .$$

Supposons maintenant que le groupe $G = T$ est un tore tel que $\mathcal{E}^T = M$. Dans ce cas, (même dans le cas de M non-compacte) l'ouvert $\mathcal{U}_M$ est dense dans $\mathfrak{t}$ et la forme $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ est égale, sur $\mathcal{U}_M$, à une fraction rationnelle à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$.

Considérons l'exemple du fibré trivial $\mathcal{E} = M \times \mathbb{C}$. L'action du tore T est triviale sur M et définie sur $\mathcal{E}$ par un poids $\alpha \in \mathfrak{t}^*$: $e^X.v := e^{\mathrm{i}\langle\alpha,X\rangle}v$, pour $X \in \mathfrak{t}$ et $v \in \mathbb{C}$. L'orientation "o" est celle de $\mathbb{C}$ et on choisit $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$. Dans ce cas, on a $\mathrm{Eul}_o(\mathcal{E})(X) = \frac{-1}{2\pi}\langle\alpha,X\rangle$ et

$$\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})(X) = -2\pi \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{\langle\alpha, X + \mathrm{i}s\beta\rangle} \ .$$

On polarise α en posant $\alpha^+ = \varepsilon_\beta\alpha$, avec $\langle\alpha^+,\beta\rangle > 0$ et $\varepsilon_\beta \in \{1,-1\}$. On vérifie que pour tout $s > 0$ et $X \in \mathfrak{t}$, on a $\int_0^\infty e^{\mathrm{i}\langle\alpha^+, X+\mathrm{i}s\beta\rangle t}dt = \frac{\mathrm{i}}{\langle\alpha^+, X+\mathrm{i}s\beta\rangle}$. En passant à la limite sur s, on obtient l'égalité de fonctions généralisées

$$\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})(X) = (2\pi\mathrm{i})\varepsilon_\beta \int_0^\infty e^{\mathrm{i}\langle\alpha^+,X\rangle t}dt \ .$$

Cette égalité donne après transformation de Fourier, l'égalité de mesures sur $\mathfrak{t}^*$

$$\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})) = (2\pi\mathrm{i})\varepsilon_\beta\, H_{\alpha^+} \ , \tag{4.19}$$

où H_{α^+} est la mesure de Heaviside associée à α^+.

La section suivante est consacrée à une généralisation de l'égalité (4.19) (cf. Proposition 4.8). Nous montrons en particulier que la forme équivariante $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ possède une transformée de Fourier tempérée qui, lorsque l'action de T sur $\mathcal{E}$ est effective, est une mesure polynomiale par morceaux.

4.3 Etude de $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ lorsque $\mathcal{E}^T = M$

On suppose dans cette section qu'un tore T, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, agit sur le fibré $\mathcal{E} \to M$ de telle façon que $\mathcal{E}^T = M$ (et M n'est pas supposée compacte). Soit $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathcal{E}(\beta_\mathcal{E}) = M$. Dans ce cas, la forme $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})$ est un élément de $\mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$.

Voici les différentes notations que l'on utilise dans cette section. On note $\mathcal{A}_{temp}^{-\infty}(\mathfrak{t}, M)$ les fonctions généralisées et tempérées sur $\mathfrak{t}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. Les distributions tempérées sur $\mathfrak{t}^*$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$ constituent l'ensemble $\mathcal{M}_{temp}^{-\infty}(\mathfrak{t}^*, M)$. On notera $\mathcal{C}_{d.r}^\infty(\mathfrak{t}^*)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur $\mathfrak{t}^*$.

On désigne par $\mathcal{F} : \mathcal{A}_{temp}^{-\infty}(\mathfrak{t}, M) \to \mathcal{M}_{temp}^{-\infty}(\mathfrak{t}^*, M)$ la transformation de Fourier qui, à toute fonction généralisée et tempérée ϕ, associe la distribution tempérée $\mathcal{F}(\phi)$ telle que

$$\int_{\mathfrak{t}^*} e^{\mathrm{i}(\xi,X)} \mathcal{F}(\phi)(\xi) = \phi(X) \quad .$$

Par exemple, pour une forme $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t}, \mathcal{A}(M))$ à support compact sur $\mathfrak{t}$, nous avons pour tout $m \in M$ et $\xi \in \mathfrak{t}^*$

$$\mathcal{F}(\eta_m)(\xi) = \left(\int_{\mathfrak{t}} e^{-\mathrm{i}(\xi,X)} \eta_m(X) dX \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^{dimT}} \ ,$$

où $d\xi$ et dX sont des mesures euclidiennes duales sur $\mathfrak{t}^*$ et $\mathfrak{t}$.

Cette section est consacrée au calcul de la distribution tempérée $\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}))$ sur $\mathfrak{t}^*$.

A tout vecteur $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, $\alpha \neq 0$, on associe la mesure de Heaviside, H_α, définie par:

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_{d.r}^\infty(\mathfrak{t}^*), \qquad < H_\alpha, \phi >= \int_0^{+\infty} \phi(u\alpha) du \quad .$$

Rappelons quelques propriétés générales de ces mesures. Le produit de convolution $H_{\alpha_1} * \cdots * H_{\alpha_p}$ est défini si les vecteurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ appartiennent à *un même demi-espace.* Dans ce cas, il s'écrit

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_{d.r}^\infty(\mathfrak{t}^*), \quad < H_{\alpha_1} * \cdots * H_{\alpha_p}, \phi >= \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \phi \left(\sum_{i=1}^p u_i \alpha_i \right) du_1 \cdots du_p \quad .$$

On voit par exemple que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_{d.r}^\infty(\mathfrak{t}^*), \quad < \underbrace{H_\alpha * \cdots * H_\alpha}_{k+1 \text{ fois}}, \phi >= \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \phi(u\alpha) du \ . \tag{4.20}$$

Lorsque les vecteurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ engendrent $\mathfrak{t}^*$, on a $H_{\alpha_1} * \cdots * H_{\alpha_p}(\xi) = P(\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_r$, avec P une fonction sur $\mathfrak{t}^*$ supportée par le cône $\{\sum_i u_i \alpha_i \ , \ u_i \geq 0\}$: cette fonction est continue et localement polynomiale sur ce cône [13].

Soit $\{E^i,\ i=1\dots r\}$ une base de $\mathfrak{t}$ et $\{E_i\,,\ i=1\dots r\}$ sa base duale. La distribution tempérée $\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E}))$ sur $\mathfrak{t}^*$ à valeur dans $\mathcal{A}(M)$ est définie par l'équation: pour toute fonction $\phi\in\mathcal{C}^{\infty}_{d.r}(\mathfrak{t}^*)$

$$< \mathcal{F}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})),\phi>_m=\int_{y\in\mathcal{E}_m}e^{-\mathrm{i}d\theta_\beta(y)}\phi\left(\sum_{i=1}^{r}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(E^i).y)E_i\right)\ . \tag{4.21}$$

Soient $\{\pm\alpha_1,\dots,\pm\alpha_p\}$ les poids distincts de T dans la fibre de $\mathcal{E}$: on les polarise en posant $\alpha_k^+(\beta)>0,\ \forall k=1,\dots,p$. On définit une structure complexe J sur les fibres de $\mathcal{E}$ en posant $J:=\mu^{\mathcal{E}}(\beta)^{-1}(-\mu^{\mathcal{E}}(\beta)^2)^{1/2}$. Dans ce cas, le fibré $\mathcal{E}$ se met sous la forme: $\mathcal{E}=\oplus_{k=1}^{p}\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$ avec

$$\mathcal{E}_{\alpha_k^+}=\{v\in\mathcal{E}\ |\ \ \mu^{\mathcal{E}}(X).v=\alpha_k^+(X)Jv,\ \forall X\in\mathfrak{t}\}.$$

Les sous-fibrés $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$ sont T-invariants et J-stables, ils sont donc de rang pair et orientés. La 2-forme $R^{\mathcal{E}}$ laisse "stable" chacun des sous-fibrés $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$: on note R_k^+ la forme de $\mathcal{A}(M,\mathrm{so}(\mathcal{E}_{\alpha_k^+}))$ définie comme la restriction de $R^{\mathcal{E}}$ à $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$.

En posant $y=\sum_{k=1}^{p}y_k$ avec $y_k\in\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$ on trouve $(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(E^i).y)=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^+(\beta)\alpha_k^+(E^i)\|y_k\|^2$ et

$$\sum_{i=1}^{r}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y,\mu^{\mathcal{E}}(E^i).y)E_i=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^+(\beta)\|y_k\|^2\alpha_k^+\ \ .$$

Pour calculer l'intégrale (4.21) en un point m, on considère une trivialisation de $\mathcal{E}$ au voisinage de m, orthonormée, dans laquelle on peut écrire $\nabla^{\mathcal{E}}=d+\Theta$. On la choisit de façon à ce que la 1-forme de connexion Θ s'annule en m.

Sur $\mathcal{E}_m$ on a l'égalité

$$d\theta_\beta=-\sum_{k=1}^{p}\Big((\mu^{\mathcal{E}}(\beta).d\mathbf{y}_k,d\mathbf{y}_k)+(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).\mathbf{y}_k,R^{\mathcal{E}}.\mathbf{y}_k)\Big)\ \ .$$

On exponentie la forme $-\mathrm{i}d\theta_\beta$, le terme de degré maximal sur la fibre s'écrit

$$\forall y\in\mathcal{E}_m,\quad \left(e^{-\mathrm{i}d\theta_\beta(y)}\right)_{max}=(2\mathrm{i})^n det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))\prod_{k=1}^{p}\left(e^{\mathrm{i}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta).y_k,\,R^{\mathcal{E}}.y_k)}d\rho_k\right),$$

où $2n$ est le rang de $\mathcal{E}$ et $d\rho_k$ désigne la forme volume euclidienne sur $\mathcal{E}_{k|m}$.

On peut récrire pour tout $\phi\in\mathcal{C}^{\infty}_{d.r}(\mathfrak{t}^*)$

$$\begin{aligned}< \mathcal{F}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})),\phi>_m&=(2\mathrm{i})^n det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))\times\\ &\int_{y\in\mathcal{E}_m}\phi\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^+(\beta)\|y_k\|^2\alpha_k^+\right)\prod_{k=1}^{p}\left(e^{\mathrm{i}\alpha_k^+(\beta)(J.y_k,\,R_k^+.y_k)}d\rho_k\right)\ \ .\end{aligned}\tag{4.22}$$

On note $\mathcal{S}_m(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})$ la sphère dans $\mathcal{E}_{\alpha_k^+|m}$ des vecteurs de norme 1. Considérons, pour $k = 1, \ldots, p$, le changement de variable

$$\begin{array}{rcl} \psi_k : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}_m(\mathcal{E}_{\alpha_k^+}) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{\alpha_k^+|m} \\ (z, v_k) & \longmapsto & (\alpha_k^+(\beta))^{-1/2}\sqrt{z}\; v_k \end{array}$$

dans l'intégrale (4.22). On a $\psi_k^*(d\rho_k)_{(z,v)} = (\alpha_k^+(\beta))^{-n_k} z^{n_k-1} dz \wedge d\sigma_k(v)$ où $d\sigma_k$ est la forme volume sur $\mathcal{S}_m(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})$ et $2n_k$ est le rang du fibré $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$. Ces changements de variables permettent d'obtenir l'expression

$$< \mathcal{F}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(\mathcal{E})), \phi >= (2\mathrm{i})^{\frac{rg\mathcal{E}}{2}} \epsilon_\beta \int_{(\mathbb{R}^+)^p} P_1(t_1) \cdots P_p(t_p) \phi\left(\sum_{k=1}^{p} t_k \alpha_k^+\right) dt_1 \ldots dt_p \ ,$$

où ϵ_β est le signe de $det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))$ et P_k le polynôme sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$ défini par l'équation

$$P_k(t) = \frac{1}{2} t^{n_k-1} \int_{\mathcal{S}(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})} e^{\mathrm{i}\, t(J.v,\, R_k^+.v)} d\sigma_k(v) \quad .$$

Calcul du polynôme P_k pour $k \in \{1, \ldots, p\}$

Pour trouver une expression simple du polynôme P_k, on calcule de deux façons la fonction $\kappa(s) := \int_{\mathbb{R}^+} P_k(t) e^{-st} dt$ définie pour tout $s > 0$.

En écrivant $P_k(t) = \sum_i a_i t^i$, on obtient pour $s > 0$

$$\kappa(s) = \sum_i a_i \int_{\mathbb{R}^+} t^i e^{-st} dt = \sum_i \frac{a_i}{s^{i+1}} i! \ . \tag{4.23}$$

D'autre part

$$\kappa(s) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{S}(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})} t^{n_k} e^{-st + \mathrm{i}t(J.v,\, R_k^+.v)} dt d\sigma_k(v) \ ,$$

et en effectuant le changement de variable $y = \sqrt{t} v$ on trouve, en utilisant (4.15)

$$\begin{aligned} \kappa(s) = \int_{\mathcal{E}_{\alpha_k^+}} e^{-s(y,y) + \mathrm{i}(J.y,\, R_k^+.y)} dy \ &= \int_{\mathcal{E}_{\alpha_k^+}} e^{-(J.y,\, (sJ - \mathrm{i}R_k^+).y)} dy \\ &= \frac{\pi^{n_k}}{det_o^{1/2}(J)\, det_o^{1/2}(sJ - \mathrm{i}R_k^+)} \ . \end{aligned}$$

Soit V un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une structure complexe J. Soit $\mathrm{End}(V_J)$ les endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de V: ce sont ceux qui commutent avec J. Pour tout $A \in \mathrm{so}(V) \cap \mathrm{End}(V_J)$, on a

$$det_o^{1/2}(J)\, det_o^{1/2}(A) = det_{V_J}^{\mathbb{C}}(-JA) \ .$$

Finalement
$$\kappa(s) = \frac{\pi^{n_k}}{det^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}_{\alpha_k^+}}(s - R_k^+)} \ .$$

On note que R_k^+ est un endomorphisme hermitien de $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$ et un résultat classique donne
$$\frac{1}{det^{\mathbb{C}}_{\mathcal{E}_{\alpha_k^+}}(s - R_k^+)} = \frac{1}{s^{n_k}} \sum_{i \leq dim M/2} \frac{1}{s^i} \, Tr_{\mathrm{S}^i(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})}\left((R_k^+)^{\otimes i}\right) \ . \tag{4.24}$$

Dans cette formule, $Tr_{\mathrm{S}^i(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})}$ est l'opérateur "trace" sur les endomorphismes complexes du fibré $\mathrm{S}^i(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})$, ce dernier étant composé des vecteurs de degré i de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})$.

En comparant les expressions (4.23) et (4.24) on obtient
$$P_k(t) = \pi^{n_k} \sum_{i=0}^{\frac{dim M}{2}} Tr_{\mathrm{S}^i(\mathcal{E}_{\alpha_k^+})}\left((R_k^+)^{\otimes i}\right) \frac{t^{n_k - 1 + i}}{(n_k - 1 + i)!}.$$

En utilisant l'égalité (4.20), on trouve
$$\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})) = (2\pi \mathrm{i})^{\frac{rg\mathcal{E}}{2}} \epsilon_\beta \sum_{I=(i_1,\ldots,i_p)} Tr_{\mathrm{S}^I(\mathcal{E})}\left((R^+)^{\otimes I}\right) (H_{\alpha_1^+})^{i_1+n_1} * (H_{\alpha_2^+})^{i_2+n_2} * \cdots * (H_{\alpha_p^+})^{i_p+n_p} \ ,$$

avec pour $I = (i_1, \ldots, i_p)$
$$\begin{aligned} \mathrm{S}^I(\mathcal{E}) &:= \mathrm{S}^{i_1}(\mathcal{E}_{\alpha_1^+}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{S}^{i_l}(\mathcal{E}_{\alpha_p^+}) \\ (R^+)^{\otimes I} &:= (R_1^+)^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes (R_p^+)^{\otimes i_p} \ . \end{aligned}$$

Si l'action de T sur $\mathcal{E}$ est effective les poids $\alpha_1^+, \cdots, \alpha_p^+$ engendrent $\mathfrak{t}^*$. Dans ce cas, les mesures $(H_{\alpha_1^+})^{i_1+n_1} * \cdots * (H_{\alpha_p^+})^{i_p+n_p}$ sont localement polynomiales et supportées par le cône $\mathbb{R}^+\alpha_1^+ + \ldots + \mathbb{R}^+\alpha_p^+$. On a démontré la

Proposition 4.8 *Soit $\mathcal{E} \to M$ un fibré euclidien orienté sur une variété M connexe. Soit T un tore qui agit sur ce fibré en préservant la structure euclidienne. On suppose que $\mathcal{E}^T = M$ et on se donne un élément $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $\mathcal{E}(\beta_\mathcal{E}) = M$. Soit $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}_T^{-\infty}(M)$ la forme T-équivariante fermée à coefficients généralisés introduite à la Définition 4.5. On polarise les poids $\{\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_p\}$ de l'action de T sur les fibres de $\mathcal{E}$ en posant: $\alpha_i^+(\beta) > 0 \ \forall i = 1, \ldots, p$. On note $C_\beta := \mathbb{R}^+\alpha_1^+ + \ldots + \mathbb{R}^+\alpha_p^+$.*

La mesure tempérée $\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}))$ vérifie
$$\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E})) = (2\pi \mathrm{i})^{\frac{rg\mathcal{E}}{2}} \epsilon_\beta \sum_{I=(i_1,\ldots,i_p)} Tr_{\mathrm{S}^I(\mathcal{E})}\left((R^+)^{\otimes I}\right) (H_{\alpha_1^+})^{i_1+n_1} * \cdots * (H_{\alpha_p^+})^{i_p+n_p} \ , \tag{4.25}$$

où ϵ_β est le signe de $det_o^{1/2}(\mu^{\mathcal{E}}(\beta))$ et $2n_k$ est le rang du fibré $\mathcal{E}_{\alpha_k^+}$. La mesure $\mathcal{F}(\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(\mathcal{E}))$ est nulle *en dehors du cône C_β et, si l'action de T sur M est effective, c'est une mesure* continue, localement polynomiale *de C_β dans $\mathcal{A}(M)$.*

5 Formule d'Atiyah-Bott et Berline-Vergne

5.1 Formule de Localisation

Considérons un groupe de Lie G compact et connexe agissant sur une variété compacte M. Soient $\beta \in \mathfrak{g}$ et $G(\beta)$ le sous-groupe de G stabilisateur de β. Soit M^β est la sous-variété des points où le champ de vecteurs β_M s'annule. Si F est une composante connexe de M^β, et N_F son fibré normal dans M, la forme $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(N_F) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(F)$ est bien définie.

Théorème 5.1 *Décomposons M^β en somme de composantes connexes F. Nous avons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{\infty}_{G(\beta)}(M) \arrow[r, "\Lambda_\beta"] \arrow[dr, "I"'] & \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(M^\beta) = \oplus_F \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(F) \arrow[d, "(i_\beta)_*"] \\
& \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(M)
\end{tikzcd} \tag{5.26}$$

où $i_\beta = \oplus_F i_F : M^\beta \to M$ est l'inclusion, et

$$\Lambda_\beta(\eta) = \oplus_F i_F^*(\eta)\,\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(N_F)\ .$$

Le reste de cette sous-section est consacrée à la démonstration de ce théorème qui est une réalisation du procédé de localisation expliqué à la section 3 en utilisant la forme $\lambda_\beta := (\beta_M, .)_M$ (voir l'exemple 1 de la sous-section 3.3). En fait, pour simplifier ce calcul nous allons modifier la forme λ_β au voisinage de M^β en une 1-forme λ_{mod} et appliquer le procédé de localisation avec cette 1-forme. Il nous restera ensuite à montrer que $\Lambda_\beta(1_M) = \sum_F \mathrm{Eul}_\beta^{-1}(N_F)$.

Modification de λ_β

On se place sur un voisinage tubulaire U_F d'une composante connexe F de M^β. On peut supposer l'existence d'un voisinage $\mathcal{W}_F$ de la section nulle dans le fibré normal N_F et d'un isomorphisme $G(\beta)$-invariant, ψ_F, de $\mathcal{W}_F$ sur U_F, tel que:

$$\psi_F(m, 0) = m \quad \text{pour } m \in F\ .$$

On reprend les notations de la sous-section 4.2. On fixe sur le fibré normal N_F un produit scalaire $G(\beta)$-invariant et on note $\theta_F^\beta := (\beta_{N_F}, {}^V)$ la 1-forme sur N_F associée.

On se propose maintenant de modifier la forme de localisation λ_β en λ_{mod} sans changer l'endroit où les formes équivariantes fermées sont localisées.

Les ouverts U_F ont été définis précédemment. Quitte à les restreindre, on peut supposer qu'ils sont disjoints.

Soit U'_F le voisinage de F dans M défini par: $U'_F = \psi_F(\frac{1}{2}\mathcal{W}_F)$ où le terme $\frac{1}{2}$ représente une contraction de facteur $1/2$ sur les fibres de N_F.

Au moyen de l'ouvert $U_{ext} = M - \cup_F \overline{U'_F}$, on réalise une partition de l'unité

$$\{(U_F, \chi_F)_F,\ (U_{ext}, \chi_{ext})\}$$

de la variété M. Pour toute composante connexe F, les fonctions χ_F sont positives, à support dans U_F, $G(\beta)$-invariantes et égales à 1 sur U'_F. La fonction χ_F est positive, à support dans U_{ext}, $G(\beta)$-invariante et elle vérifie l'équation:

$$\sum_F \chi_F + \chi_{ext} = 1\ . \tag{5.27}$$

On peut maintenant définir la forme λ_{mod} et montrer qu'elle localise encore les formes $G(\beta)$-équivariantes fermées sur M^β.

Proposition 5.2 *Considérons la forme λ_{mod} définie par l'équation*

$$\lambda_{mod} := \chi_{ext}\lambda_\beta + \sum_{F\subset M^\beta} \chi_F(\psi_F^{-1})^*(\theta_F^\beta)\ ,$$

où la somme est prise sur les composantes connexes F de M^β. La forme λ_{mod} est $G(\beta)$-invariante et détermine la même localisation que la forme λ_β: en particulier $\{\Phi_{\lambda_{mod}} = 0\} = M^\beta$.

Démonstration: Soit F une composante connexe de M^β: la forme $(\psi_F^{-1})^*(\theta_F^\beta)$ est définie sur l'ouvert U_F, tandis que la fonction χ_F a son support dans U_F. Les formes $\chi_F(\psi_F^{-1})^*(\theta_F^\beta)$ sont donc définies et $G(\beta)$-invariantes sur M.

Considérons la fonction f : $M \to \mathfrak{g}(\beta)$ constante, égale à β. Montrons que λ_β, λ_{mod} et f vérifient les hypothèses de la Proposition 3.11: notre proposition sera démontrée.

On voit tout d'abord que $\langle \Phi_{\lambda_\beta}, \beta\rangle = \|\beta_M\|^2$ est strictement positive $M - M^\beta$ et que $M^\beta \subset \{\Phi_{\lambda_{mod}} = 0\}$.

D'autre part, la fonction $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, \beta\rangle$ se décompose en somme de fonctions <u>positives</u>

$$\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, \beta\rangle = \chi_{ext}\|\beta_M\|^2 + \sum_{F\subset M^\beta} \chi_F \|\beta_{N_F}\|^2 \circ \psi_F^{-1}\ . \tag{5.28}$$

Supposons $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, \beta\rangle$ nulle en m, alors

$$\begin{aligned} \chi_{ext}(m)\|\beta_M\|^2(m) &= 0 \\ \chi_F(m)\|\beta_{N_F}\|^2 \circ \psi_F^{-1}(m) &= 0 \quad \text{pour tout } F \subset M^\beta. \end{aligned}$$

Considérons la première égalité:

– Soit $\|\beta_M\|^2(m) = 0$, ce qui implique $m \in M^\beta$.

– Soit $\chi_{ext}(m) = 0$. Il existe donc, d'après (5.27), une composante connexe F de M^β telle que $\chi_F(m) \neq 0$. Ceci entraine $m \in U_F$ et $\|\beta_{N_F}\|^2 \circ \psi_F^{-1}(m) = 0$. Cette dernière égalité implique $m \in F$: dans tous les cas $m \in M^\beta$.

On a donc démontré que l' application $\Phi_{\lambda_{mod}}$ est nulle sur M^β, et que la fonction $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, \beta\rangle$ est strictement positive sur $M - M^\beta$. □

Nous effectuons maintenant la localisation avec la forme λ_{mod}. On a montré dans la section 3 comment cette forme définit un morphisme $\Lambda_\beta : \mathcal{H}^{\infty}_{G(\beta)}(M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{G(\beta)}(M^\beta)$. Il nous reste à calculer $\Lambda_\beta(1_M)$. Nous avons $\Lambda_\beta(1_M) = \sum_F \Lambda_F$ et $\Lambda_F = \lim_{a\to+\infty} \Lambda_F^a$ avec

$$\Lambda_F^a = \int_{N_F/F} \chi_F\, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\theta_F^\beta} + \mathrm{i}\,\mathcal{D}\left(\int_0^a \left(\int_{N_F/F} \chi_F e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\theta_F^\beta}\theta_F^\beta\right)dt\right) .$$

La Remarque 4.4 montre que $\int_{N_F/F} \chi_F e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\theta_F^\beta}\theta_F^\beta = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que $\Lambda_F^a = \int_{N_F/F} \chi_F\, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\theta_F^\beta}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Considérons la contraction δ_a, $a > 0$ sur N_F définie par

$$\delta_a(m, v) = (m, \frac{v}{\sqrt{a}}) \quad \text{pour } m \in F \text{ et } v \in N_{F|m} .$$

La forme θ_F^β a une dépendance quadratique dans les fibres: $a\,(\delta_a)^*(\theta_F^\beta) = \theta_F^\beta$. En effectuant le changement de variable δ_a dans l'intégrale $\int_{N_F/F} \chi_F e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\theta_F^\beta}$, on trouve

$$\int_{N_F/F} \chi_F e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\theta_F^\beta} = \int_{N_F/F} \chi_F \circ \delta_a\, e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_F^\beta}$$

et donc que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{N_F/F} \chi_F\, e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\theta_F^\beta} = \int_{N_F/F} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_F^\beta} ,$$

car $\chi_F = 1$ au voisinage de la section nulle.

Finalement nous avons $\Lambda_F = \int_{N_F/F} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_F^\beta}$. La forme Λ_F est égale à l'inverse de la classe d'Euler, $\mathrm{Eul}_\beta^{-1}(N_F)$, définie à la sous-section 4.2.

5.2 Polynômes de Duistermaat-Heckman

Considérons l'action hamiltonienne d'un tore T sur une variété symplectique compacte (M, Ω). On note $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ l'application moment, et $\Omega_\mathfrak{t}(X) := \Omega + \langle \mu, X\rangle$ la forme symplectique équivariante associée. Soit $dm_L := \frac{\Omega^n}{n!}$ la mesure de Liouville sur M (avec $dimM = 2n$). L'image directe $\mu_*(dm_L)$ de la mesure dm_L par l'application moment vérifie

$$\mu_*(dm_L) = \frac{1}{\mathrm{i}^n}\mathcal{F}\left(\int_M e^{\mathrm{i}\Omega_\mathfrak{t}}\right) ,$$

où $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier.

Dans [10], Duistermaat et Heckman montrent que la mesure $\mu_*(dm_L)$ se met sous la forme $\mu_*(dm_L) = f(\xi)d\xi$, où f est une fonction localement polynomiale supportée par $\mu(M)$.

Soit $\beta \in \mathfrak{t}$ tel que $M^\beta = M^T$. Appliquons le Corollaire 3.10, associé au Théorème 5.1, au calcul de la fonction $\int_M e^{\mathrm{i}\Omega_{\mathfrak{t}}(X)}$. Nous obtenons

$$\int_M e^{\mathrm{i}\Omega_{\mathfrak{t}}(X)} = \sum_{F\subset M^T} e^{\mathrm{i}\langle\mu(F),X\rangle} \int_F e^{\mathrm{i}\Omega_F}\, \mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(N_F)(X)\ , \tag{5.29}$$

où Ω_F est la 2-forme symplectique induite par Ω sur la sous-variété F.

Prenons la transformée de Fourier de l'égalité (5.29):

$$\mu_*(dm_L) = \frac{1}{\mathrm{i}^n} \sum_{F\subset M^T} \delta_{\mu(F)} * \left(\int_F e^{\mathrm{i}\Omega_F} \mathcal{F}(\mathrm{Eul}_{\beta}^{-1}(N_F))\right)\ ,$$

où $\delta_{\mu(F)}$ désigne la mesure de Dirac en $\mu(F) \in \mathfrak{t}^*$ et "$*$" est le produit de convolution.

Nous gardons les notations de la sous-section 4.3. En appliquant la Proposition 4.8 à chaque fibré N_F, nous obtenons une expression de la mesure $\mu_*(dm_L)$ similaire à celle donnée par Canas da Silva et Guillemin dans [8] (voir le Théorème 2).

Proposition 5.3 *La mesure $\mu_*(dm_L)$ admet la décomposition*

$$\mu_*(dm_L) = (2\pi)^{\frac{dim M}{2}} \sum_{F,I} c^\beta_{F,I}\ \delta_{\mu(F)} * (H_{\alpha^+_{1,F}})^{i_1+n_1} * \cdots * (H_{\alpha^+_{p_F,F}})^{i_{p_F}+n_{p_F}}\ , \tag{5.30}$$

où les constantes $c^\beta_{F,I} \in \mathbb{C}$ vérifient

$$c^\beta_{F,I} = \frac{\epsilon^F_\beta}{(2\pi\mathrm{i})^{\frac{dim F}{2}}} \int_F e^{\mathrm{i}\Omega_F} Tr_{\mathrm{S}^I(N_F)}\left((R^+_F)^{\otimes I}\right)\ .$$

Dans la première égalité, la somme est prise sur les composantes connexes F de M^T, et ensuite sur les multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_{p_F}) \in \mathbb{N}^{p_F}$. On note $\alpha^+_{1,F}, \ldots, \alpha^+_{p_F,F}$ les poids distincts pour l'action de T sur N_F, "polarisés" au moyen de β, et $2n_k$ le rang du fibré $N_{F,\alpha^+_{k,F}}$. Dans la deuxième égalité, le terme ϵ^F_β est le signe de $det^{1/2}_o(\mu^{N_F}(\beta))$.

Remarque: la somme dans l'égalité (5.30) est finie puisque $c^\beta_{F,I} = 0$ si $2|I| > dimF$ (avec $|I| = \sum_k i_k$).

Remarquons que chaque terme $\delta_{\mu(F)} * (H_{\alpha^+_{1,F}})^{i_1+n_1} * \cdots * (H_{\alpha^+_{p,F}})^{i_{p_F}+n_{p_F}}$ est une mesure "localement polynomiale" supportée par le cône $\mu(F) + \mathbb{R}^+\alpha^+_{1,F} + \ldots + \mathbb{R}^+\alpha^+_{p_F,F}$.

Lorsque l'ensemble M^T des points fixes est fini, on retrouve l'expression

$$\mu_*(dm_L) = (2\pi)^{\frac{dim M}{2}} \sum_F \epsilon^F_\beta\ \delta_{\mu(F)} * (H_{\alpha^+_{1,F}})^{n_1} * \cdots * (H_{\alpha^+_{p_F,F}})^{n_{p_F}}$$

obtenue dans [13].

6 Localisation dans le cas d'une action hamiltonienne d'un tore

Soit (M, Ω) une variété symplectique compacte connexe munie de l'action hamiltonienne d'un tore T. On note $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T et $\mathfrak{t}^*$ l'espace vectoriel dual. Soit $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ l'application moment associée à cette action. C'est une application T-équivariante déterminée (à une constante près) par l'équation

$$d\langle \mu, X\rangle = c(X_M)\Omega \quad ,\forall\, X \in \mathfrak{t}, \tag{6.31}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspond aux crochets de dualité entre $\mathfrak{t}^*$ et $\mathfrak{t}$. L'action de T sur $\mathfrak{t}^*$ étant triviale les applications

$$\mu_\varepsilon := \mu - \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathfrak{t}^*$$

sont encore des applications moment.

Pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, on notera $\mathrm{Cr}(f) = \{m \in M, df_m = 0\}$ l'ensemble de ses points critiques.

Nous faisons le choix d'un produit scalaire sur $\mathfrak{t}^*$ et suivant l'idée de Witten [25], on applique le procédé de localisation avec la forme λ^ε définie ci-dessous.

Définition 6.1 *Soit $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$. On désigne par λ^ε la 1-forme T-invariante suivante*

$$\lambda^\varepsilon = (\mathcal{H}^\varepsilon, \cdot)_M,$$

où $\mathcal{H}^\varepsilon$ est le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction $\frac{1}{2}\|\mu_\varepsilon\|^2$ et $(\cdot,\cdot)_M$ est une métrique riemannienne T-invariante sur M.

Considérons une base orthonormée E^i, $i = 1, \cdots, r$ de $\mathfrak{t}$, et notons E_i, $i = 1, \cdots, r$ la base duale. Nous avons

$$\mathcal{H}^\varepsilon = \sum_{i=1}^r \langle \mu_\varepsilon, E^i\rangle\, E^i_M \qquad \text{et} \qquad \Phi_{\lambda^\varepsilon} = \sum_{i=1}^r (\mathcal{H}^\varepsilon, E^i_M)_M E_i \quad . \tag{6.32}$$

Comme $j^{-1}(\mu_\varepsilon) = \sum_{i=1}^r \langle \mu_\varepsilon, E^i\rangle\, E^i$, on voit que le champ de vecteurs $\mathcal{H}^\varepsilon$ vérifie $\|\mathcal{H}^\varepsilon\|^2_M = \langle \Phi_{\lambda^\varepsilon}, j^{-1}(\mu_\varepsilon)\rangle$. Ainsi pour tout $m \in M$, $\Phi_{\lambda^\varepsilon}(m) = 0$ entraine $\|\mathcal{H}^\varepsilon\|_M(m) = 0$. L'égalité de droite dans l'équation (6.32) montre, réciproquement, que si $\mathcal{H}^\varepsilon_m = 0$ alors $\Phi_{\lambda_\varepsilon}(m) = 0$.

Comme $\mathcal{H}^\varepsilon_m = 0 \Leftrightarrow d(\|\mu_\varepsilon\|^2)_m = 0$, on constate que

$$\{\Phi_{\lambda^\varepsilon} = 0\} = \mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2) \ .$$

On constate donc que la 1-forme λ^ε va localiser les formes équivariantes sur $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$. Pour faciliter le calcul de cette localisation nous modifions λ^ε en une 1-forme λ_{mod} et effectuons le calcul avec cette nouvelle 1-forme.

Nous montrons dans le premier paragraphe que pour $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ générique, les points critiques de $\|\mu_\varepsilon\|^2$ forment une sous-variété (non-connexe) lisse de M. Nous effectuons le calcul de la localisation aux paragraphes suivants.

6.1 Points critiques

Dans une première partie nous rappelons la structure des points critiques de la fonction moment [1, 15], et définissons un ensemble d'indices $\mathcal{B}$ qui nous permet ensuite, en suivant Kirwan [18], de définir une partition des points critiques de $\|\mu_\varepsilon\|^2$.

Finalement, nous montrons l'existence d'un ouvert W *dense* de $\mathfrak{t}^*$ tel que pour tout ε dans W, les points critiques de la fonction $\|\mu_\varepsilon\|^2$ forment une sous-variété fermée de M.

6.1.1 Les points critiques de la fonction moment

Généralement, pour une fonction différentiable $f : M \to N$, un point $m \in M$ est dit critique si l'application tangente $\mathbf{T}_m f : \mathbf{T}_m M \to \mathbf{T}_{f(m)} N$ n'est pas surjective. Dans le cas de l'application moment, $\mathbf{T}_m \mu$ n'est pas surjective s'il existe $X \in \mathfrak{t} - \{0\}$ tel que $\langle \mathbf{T}_m \mu, X \rangle = 0$: d'après l'égalité (6.31) c'est le cas si $X_M(m) = 0$. Ainsi l'élément $m \in M$ est un point critique de la fonction μ si et seulement si le stabilisateur de m, $\mathrm{Stab}(m)$, contient un sous-tore de T de dimension 1. Par exemple, lorsque l'action du tore n'est pas effective, tous les points de M sont des points critiques de μ.

Nous donnons, dans le cas de l'application moment, une définition modifiée. Le sous-groupe $S_M := \cap_{m \in M} \mathrm{Stab}(m)$ est appelé stabilisateur générique. Si s_M est l'algèbre de Lie de S_M, on constate d'après (6.31) que μ envoie M dans un sous-espace affine A_M qui a pour direction vectorielle $(s_M)^\perp := \{\xi \in \mathfrak{t}^* | \ \langle \xi, X \rangle = 0, \ \forall X \in s_M\}$. L'action de T sur la variété M est dite quasi-effective si S_M est fini.

Définition 6.2 *Les points critiques de l'application moment sont, par définition, les points critiques (pour l'ancienne définition) de l'application moment restreinte $\mu : M \to A_M$: ce sont les points $m \in M$ tels que le groupe* $\mathrm{Stab}(m)/S_M$ *n'est pas fini.*

Voici les notations utilisées par la suite:

- pour $A \subset \mathfrak{t}^*$, on note $\mathrm{Aff}(A)$ (resp. $\mathrm{conv}(A)$) le sous-espace affine de $\mathfrak{t}^*$ engendré par A (resp. l'enveloppe convexe de A) et $\overrightarrow{A}$ désigne la direction vectorielle de ce sous-espace affine.

- pour $A \subset \mathfrak{t}^*$, on note $(\overrightarrow{A})^\perp$ (ou plus simplement $A^\perp$) l'ensemble des vecteurs de $\mathfrak{t}$ *orthogonaux* à $\overrightarrow{A}$.

- pour $P \subset \mathfrak{t}^*$, T_P est le sous-tore de T engendré par $\mathrm{Exp}(P^\perp)$.

L'ensemble des valeurs critiques de la fonction μ est (par définition) l'image des points critiques: c'est donc la réunion $\cup_{S_M \subset T'} \mu(M^{T'})$ où l'union est prise sur tous les sous-tores T' de T tels que T'/S_M n'est pas fini.

Soit a une valeur régulière de μ. Dans ce cas, pour tout $m \in \mu^{-1}(a)$ le groupe $\mathrm{Stab}(m)/S_M$ est fini: $\mu^{-1}(a)$ est une sous-variété de M sur laquelle le groupe T/S_M agit localement librement.

Pour obtenir une description plus précise des points critiques nous avons besoin du théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg [1, 15].

Théorème 6.3 (Atiyah-Guillemin-Sternberg) *Soit (N, Ω_N) une variété symplectique compacte et connexe, munie de l'action hamiltonienne d'un tore G. Soit $\mu : N \to \mathrm{Lie}(G)^*$ l'application moment. Alors*

1. *L'image de l'application moment, $\mu(N)$, est égale à l'enveloppe convexe du sous-ensemble $\{\mu(F),\ F$ composante connexe de $N^G\}$.*

2. *Pour tout $a \in \mathrm{Lie}(G)^*$, la fibre $\mu^{-1}(a)$ est connexe.*

Notons que l'application moment est constante sur chaque composante connexe de M^T, ainsi $\mu(M^T)$ est un ensemble fini de points de $\mathfrak{t}^*$.

Soit T' un sous-tore de T contenant S_M et tel que T'/S_M ne soit pas fini. Chaque composante connexe $\mathcal{Z}$ de $M^{T'}$ est une sous-variété symplectique de M qui est munie de la 2-forme symplectique restreinte $\Omega_{|\mathcal{Z}}$ et de la restriction $\mu_{|\mathcal{Z}}$ de l'application moment μ. En appliquant le Théorème 6.3 à $(\mathcal{Z}, \Omega_{|\mathcal{Z}})$ on voit que $\mu(\mathcal{Z})$ est un polytope convexe P de $\mathfrak{t}^*$ égal à l'enveloppe convexe de $\{\mu(\mathcal{F}),\ \mathcal{F}$ composante connexe de $\mathcal{Z}^T\}$. Soit $X \in \mathfrak{t}$, on a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}\{\ \mathrm{Exp}(s.X); s \in \mathbb{R}\} \text{ agit trivialement sur } \mathcal{Z} \ &\Leftrightarrow\ \langle \mu, X\rangle \text{ est constant sur } \mathcal{Z}\\ &\Leftrightarrow\ X \in P^{\perp}\ .\end{aligned}$$

Ces équivalences permettent de voir que l'algèbre de Lie de T' est incluse dans $P^{\perp}$ et que l'algèbre de Lie de T_P est égale à $P^{\perp}$: on a donc $\mathcal{Z} \subset M^{T_P} \subset M^{T'}$. On en conclut que $\mathcal{Z}$ est une composante connexe de M^{T_P} sur laquelle T/T_P agit quasi-effectivement, ou dit autrement, le stabilisateur générique de $\mathcal{Z}$ est un sous-groupe de T dont la composante connexe (de l'élément neutre) est égale à T_P. Notons que $\dim P = \dim \mathfrak{t} - \dim \mathfrak{t}_P < \dim \mathfrak{t} - \dim(\mathrm{Lie}(S_M)) = \dim(\mu(M))$.

Définition 6.4 *On note $\mathcal{B}'$ l'ensemble défini par*

$$\mathcal{B}' = \{P \text{ polytope convexe de } \mathfrak{t}^* \mid \exists\ \mathcal{Z} \text{ composante connexe de } M^{T_P} \text{ avec } \mu(\mathcal{Z}) = P\}\ .$$

D'après le Théorème 6.3, chaque élément de $\mathcal{B}'$ est une enveloppe convexe de points de $\mu(M^T)$. La compacité de M impose que M^T soit une réunion *finie* de sous-variétés de M. L'ensemble $\mathcal{B}'$ correspond donc à une collection *finie* de polytopes de $\mathfrak{t}^*$. On remarque, en particulier, que $\mathcal{B}'$ ne possède qu'un seul polytope de dimension maximale, c'est à dire $\mu(M)$.

On note $\mathfrak{t}^*_{reg}$ l'ensemble des points de $\mathfrak{t}^*$, réguliers pour l'application moment. On vient de montrer l'égalité suivante:

$$\mathfrak{t}^*_{reg} = \mathfrak{t}^* - \bigcup_{\substack{P\in\mathcal{B}' \\ P\neq\mu(M)}} P \ . \tag{6.33}$$

Proposition 6.5 *1. Soit $P \in \mathcal{B}'$ et $\mathcal{Z}$ une composante connexe de M^{T_P} telle que $\mu(\mathcal{Z}) = P$; alors T/T_P agit quasi-effectivement sur $\mathcal{Z}$.*

2. Si $P \in \mathcal{B}'$, l'algèbre de Lie de T_P est égale à $P^\perp$.

3. L'ensemble $\mathcal{B}'$ contient toutes les faces du polytope $\mu(M)$. De manière générale, si P est un polytope de $\mathcal{B}'$ alors les faces de P sont encore dans $\mathcal{B}'$.

Démonstration de 1. *et* 2.*:* Cela a été démontré auparavant.

Démonstration de 3.*:* Soit P une face du polytope $\mu(M)$. Dans ce cas l'ensemble $\mu^{-1}(P)$ est une composante connexe de M^{T_P}. Pour s'en assurer, considérons le cône $\mathcal{C} := \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \xi - \xi', X\rangle \geq 0, \forall \xi \in P, \forall \xi' \in \mu(M)\}$. On voit que pour tout point β dans l'intérieur du cône $\mathcal{C}$ la fonction $\langle \mu, \beta\rangle$ prend son maximum sur $\mu^{-1}(P)$: on a donc $\mu^{-1}(P) \subset M^\beta$ et $\mu^{-1}(P) = \langle \mu, \beta\rangle^{-1}(s_\beta)$ avec $s_\beta = \sup_M\langle \mu, \beta\rangle$. Ceci permet de voir que $\mu^{-1}(P)$ est une composante connexe de M^β (cf. [7]). Comme $\mathcal{C}$ engendre $P^\perp$, on conclut que $\mu^{-1}(P)$ est une composante connexe de M^{T_P}.

Dans le cas général d'un polytope $P \in \mathcal{B}'$, on procède de la même façon avec la sous-variété symplectique $\mathcal{Z}$ de M telle que $\mu(\mathcal{Z}) = P$. Soit P' une face de P. On montre alors que $\mathcal{Z}' = (\mu_{|\mathcal{Z}})^{-1}(P')$ est une composante connexe de $M^{T_{P'}}$ telle que $\mu(\mathcal{Z}') = P'$, et donc que $P' \in \mathcal{B}'$. □

Dans la prochaine section nous étudions pour quelles valeurs de $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ les points critiques de la fonction $\|\mu_\varepsilon\|^2$ forment une sous-variété de M.

6.1.2 Les points critiques de la fonction $\|\mu_\varepsilon\|^2$

Le produit scalaire sur $\mathfrak{t}^*$ induit un isomorphisme linéaire $j : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}^*$. Dans la suite de cette section nous considérons *deux formes d'orthogonalité*: l'orthogonalité issue de *la dualité entre* $\mathfrak{t}$ *et* $\mathfrak{t}^*$ et *la j-orthogonalité* définie au moyen du produit scalaire.

Définition 6.6 *Pour $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$ et A un sous-espace affine de $\mathfrak{t}^*$, $\beta(\varepsilon, A)$ est le projeté orthogonal de ε sur A.*

Introduisons un ensemble $\mathcal{B}$ qui sera par la suite l'ensemble des indices d'une partition de l'ensemble $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Définition 6.7 *On notera $\mathcal{B}$ la collection de sous-espaces affines de* $\mathfrak{t}^*$ *donnée par*

$$\mathcal{B} := \{\mathrm{Aff}(P),\ P \in \mathcal{B}'\}\ .$$

Pour tout Δ de $\mathcal{B}$, nous noterons T_Δ le sous-tore de T engendré par $\mathrm{Exp}(\Delta^\perp)$. On sait d'après le point 2) de la Proposition 6.5 que $T_\Delta = \mathrm{Exp}(\Delta^\perp)$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ nous renseigne sur les types d'orbites de M sous l'action de T. Soit T_1 un sous-groupe fermé de T et $M_{T_1} := \{m \in M \mid \mathrm{Stab}(m) = T_1\} \subset M^{T_1}$. Si $\mathcal{Z}$ est une composante connexe de M^{T_1} telle que $\mathcal{Z} \cap M_{T_1} \neq \emptyset$, le stabilisateur générique de $\mathcal{Z}$ est égal à T_1. L'image $\mu(\mathcal{Z})$ est un polytope de $\mathcal{B}'$ et $\Delta := \mathrm{Aff}(\mu(\mathcal{Z}))$ est un sous-espace affine de $\mathcal{B}$ qui vérifie

$$(\overrightarrow{\Delta})^\perp = \mathrm{Lie}(T_1)\ ,$$

c'est à dire que le sous-tore T_Δ est égal à la composante connexe (de l'élément neutre) du sous-groupe T_1.

Le champ de vecteurs hamiltonien $\mathcal{H}^\varepsilon$ associé à la fonction $\frac{1}{2}\|\mu_\varepsilon\|^2$ vérifie:

$$\mathcal{H}^\varepsilon_m = \left(j^{-1}(\mu(m) - \varepsilon)\right)_{|M}(m)\ , \qquad m \in M.$$

Voici une première description des points critiques de $\|\mu_\varepsilon\|^2$:

$$\mathrm{Cr}(\ \|\mu_\varepsilon\|^2) = M(\mathcal{H}^\varepsilon) = \bigcup_{\beta \in \mathfrak{t}^*} M(j^{-1}(\beta - \varepsilon)) \cap \mu^{-1}(\beta)\ . \tag{6.34}$$

Démonstration: on a $d(\|\mu_\varepsilon\|^2)_m = \Omega(\mathcal{H}^\varepsilon_m, .)$ et donc $m \in \mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$ si et seulement si $j^{-1}(\mu(m) - \varepsilon)_{|M}(m) = 0$, c'est à dire $m \in M(j^{-1}(\beta - \varepsilon))$ avec $\beta = \mu(m)$. $\Box$

Dans la proposition suivante, nous rappelons le résultat de Kirwan [18] qui montre que l'union dans l'égalité (6.34) est en fait finie, mais nous indexons différemment les composantes de $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Proposition 6.8 (Kirwan) *Pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{t}^*$, on a*

$$\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2) = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{B}} M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))\,.$$

Démonstration de l'inclusion "$\subset$": On utilise l' égalité (6.34). Soient $m \in M(j^{-1}(\beta - \varepsilon)) \cap \mu^{-1}(\beta)$ et $\mathcal{Z}_\beta$ la composante connexe de $M(j^{-1}(\beta - \varepsilon))$ contenant m. Comme $\mathcal{Z}_\beta$ est une sous-variété symplectique de M, le Théorème 6.3 assure que $\mu(\mathcal{Z}_\beta) = P$ est un polytope convexe. De plus, pour tout vecteur X de $P^\perp$, $m \longmapsto \langle \mu(m), X\rangle$ est constant sur $\mathcal{Z}_\beta$; ce qui implique

$$\mathcal{Z}_\beta \subset M^{T_P} \subset M(j^{-1}(\beta - \varepsilon))\ .$$

On voit alors que $\mathcal{Z}_\beta$ est en fait une composante connexe de M^{T_P}. Ceci montre que $P \in \mathcal{B}'$, et notons $\Delta := \mathrm{Aff}(P)$ le sous-espace affine de $\mathcal{B}$ associé. Comme le vecteur $\beta - \varepsilon$ est j-orthogonal à Δ et $\beta \in \Delta$, on a $\beta = \beta(\varepsilon, \Delta)$ et finalement $m \in M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$.

Démonstration de l'inclusion "$\supset$": Elle est évidente puisque $M^{T_\Delta} \subset M(j^{-1}(\beta - \varepsilon))$ pour $\beta = \beta(\varepsilon, \Delta)$. $\square$

On suppose maintenant que le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ est fixé et on cherche les valeurs de ε pour lesquelles les sous-ensembles $M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$, $\Delta \in \mathcal{B}$ forment une collection de sous-variétés disjointes de M.

On note $\mathcal{B}'_\Delta := \{P \in \mathcal{B}',\ P \subset \Delta \text{ et } \dim P < \dim \Delta\}$. Soient Δ_{reg} l'ouvert de Δ défini par

$$\Delta_{reg} = \Delta - \bigcup_{P \in \mathcal{B}'_\Delta} P \ , \tag{6.35}$$

et $M^{T_\Delta}_{red} = M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\Delta)$ la réunion des composantes connexes $\mathcal{Z}$ de M^{T_Δ} telles que $\mu(\mathcal{Z}) \subset \Delta$.

Pour que $M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta)) = M^{T_\Delta}_{red} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$ soit une sous-variété de M, il suffit que $\beta(\varepsilon, \Delta)$ soit une valeur régulière de l'application moment restreinte à $M^{T_\Delta}_{red}$:

$$\mu_{|M^{T_\Delta}_{red}} : M^{T_\Delta}_{red} \longrightarrow \Delta \ .$$

Si $m \in M^{T_\Delta}_{red}$ est un point singulier de $\mu_{|M^{T_\Delta}_{red}}$, alors $m \in M^{T'}$ avec $T_\Delta \subset T'$ et $\dim(T_\Delta) < \dim(T')$. Dans ce cas $\mu(m) \in P$ où P est un polytope de $\mathcal{B}'$ contenu dans Δ, et de dimension strictement inférieure, autrement dit $\mu(m) \notin \Delta_{reg}$. Ainsi, si $\beta \in \Delta_{reg}$, l'image réciproque $\mu^{-1}_{|M^{T_\Delta}_{red}}(\beta) = M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta)$ est une sous-variété (non nécessairement connexe) de M sur laquelle le groupe T/T_Δ agit localement librement.

Remarquons que l'égalité (6.35) coincide, dans le cas d'une action quasi-effective, avec l'égalité (6.33) en prenant $\Delta = \mathfrak{t}^*$.

Pour tout $\Delta \in \mathcal{B}$, notons W_Δ l'ouvert de $\mathfrak{t}^*$ défini par l'égalité $W_\Delta = \Delta_{reg} + j(\mathfrak{t}_\Delta)$.

Proposition 6.9

1) Pour tout $\varepsilon \in W_\Delta$, $M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$ est une sous-variété (peut-être vide) de M sur laquelle le groupe T/T_Δ agit localement librement.

2) L'ouvert $W := \cap_{\Delta \in \mathcal{B}} W_\Delta$ est dense *dans $\mathfrak{t}^*$ et pour tout $\varepsilon \in W$ les sous-variétés*

$$C^\varepsilon_\Delta := M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta)), \qquad \Delta \in \mathcal{B},$$

forment une partition de $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Démonstration: 1) Par définition, si $\varepsilon \in W_\Delta$ alors $\beta(\varepsilon, \Delta)$ appartient à Δ_{reg} et donc $M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon, \Delta))$ est une sous-varitété de M.

2) Pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$ l'ouvert W_Δ est dense dans Δ: l'ensemble $\mathcal{B}$ étant fini, l'ouvert W est dense dans $\mathfrak{t}^*$.

Fixons $\varepsilon \in W$. Soient $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}$ et $m \in C^\varepsilon_{\Delta_1} \cap C^\varepsilon_{\Delta_2}$. Les groupes $\mathrm{Stab}(m)/T_{\Delta_1}$ et $\mathrm{Stab}(m)/T_{\Delta_2}$ sont tous les deux finis, ce qui donne $\mathrm{Lie}(T_{\Delta_1}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(m)) = \mathrm{Lie}(T_{\Delta_2})$ et par suite $T_{\Delta_1} = T_{\Delta_2}$. Comme $\beta(\varepsilon, \Delta_1) = \beta(\varepsilon, \Delta_2) \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ on a pour finir $\Delta_1 = \Delta_2$. Les sous-variétés C^ε_Δ, $\Delta \in \mathcal{B}$ sont donc disjointes. $\square$

6.1.3 Exemple

Soit M une orbite coadjointe de dimension 6 de $SU(3)$, et T le tore maximal de $SU(3)$. On identifie $\mathfrak{t}^*$ à $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne usuelle), et on note $\mu : M \to \mathbb{R}^2$ l'application moment associée à l'action de T sur M. L'image de l'application moment est un hexagone (voir Figure 1) où les sommet A, B, C, D, E, F sont l'image par μ des points fixes M^T.

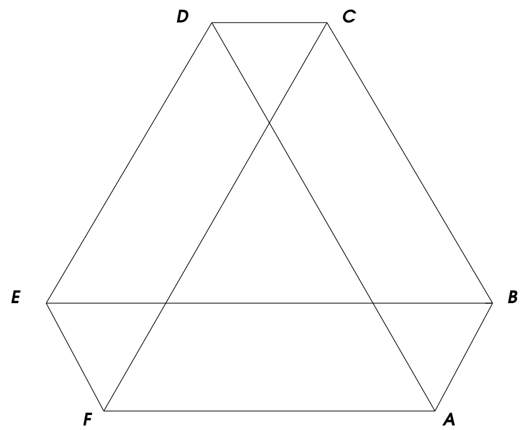

Figure 1

On vérifie que

$$\mathcal{B}' = \{\text{faces de } \mu(M)\} \bigcup \{[AD], [BE], [FC]\} .$$

Ici $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$ car les polytopes de $\mathcal{B}'$ engendrent des sous-espaces affines distincts.

Dans la Figure 2, l'ouvert W défini à la Proposition 6.9 est le complémentaire des droites (en traits pleins) et des segments (en traits pointillés).

Considérons, comme dans la Figure 3, $e = \varepsilon \in W$. Pour $\Delta \in \{(AB), (CD), (EF)\}$, les composantes C^{ε}_{Δ} sont vides car les projections $\beta(\varepsilon, \Delta)$ ne sont pas dans l'image de μ. Pour $\Delta = \mathfrak{t}^*$, on a $C^{\varepsilon}_{\mathfrak{t}^*} = \mu^{-1}(\varepsilon)$, et si $m \in \{A, B, C, D, E, F\}$, $C^{\varepsilon}_{\{m\}} = \mu^{-1}(m)$ est un point de M^T. Pour les autres $\Delta \in \mathcal{B}$, on a représenté sur la Figure 3 les projections $\beta(\varepsilon, \Delta)$ (notées en fait $b(e, \Delta)$).

Dans cet exemple, on peut vérifier que les V-variétés $\mathcal{M}^{\varepsilon}_{\Delta}$ sont pour tout $\Delta \neq \mathfrak{t}^*$, soit vides, soit réduites à un point.

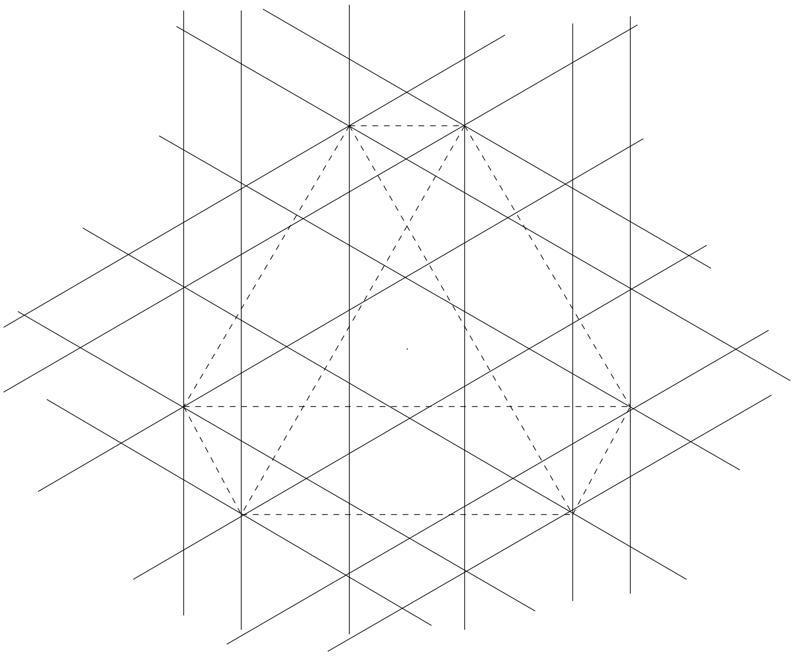

Figure 2

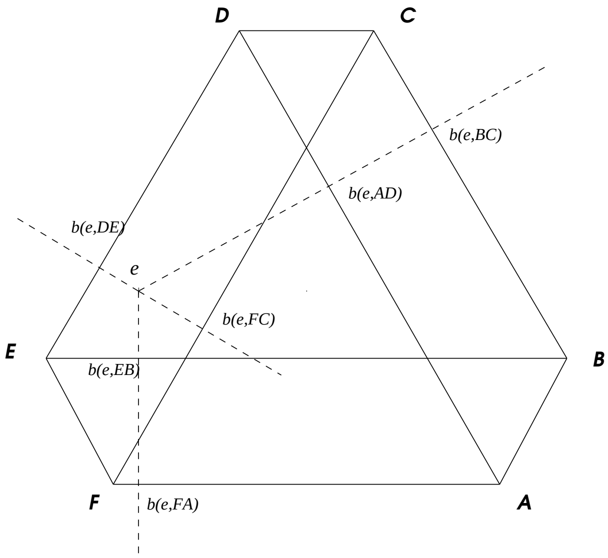

Figure 3

6.2 Modification de la forme λ^ε

Nous fixons pour le reste de cette section un élément $\varepsilon \in W$.

Pour effectuer la localisation nous allons procéder de la même façon qu'à la section 5. Nous modifions la forme λ^ε au voisinage de chaque C^ε_Δ et formons une nouvelle 1-forme

λ_{mod} qui localisera encore les formes équivariantes fermées sur $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$, nous faisons le choix d'un supplémentaire de $\mathfrak{t}_\Delta$ dans $\mathfrak{t}$ que l'on note $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, tel que l'on ait une décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$ où T/T_Δ désigne le sous-tore de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$.

On sait, d'après la Proposition 6.9, que le groupe T/T_Δ agit localement librement sur C^ε_Δ. En conséquence on peut choisir la structure riemannienne de M de telle façon que, pour tout $E \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, la fonction $m \to (E_M, E_M)_M(m)$ soit constante au voisinage de C^ε_Δ, égale à $\|E\|^2_{\mathfrak{t}}$.

Dans la suite de cette partie on se place sur un voisinage tubulaire U_Δ de C^ε_Δ dans M.

Soit $N(C^\varepsilon_\Delta \subset M)$ le fibré normal de C^ε_Δ dans M. Il se décompose en la somme de deux fibrés: $N^1_\Delta \oplus N^2_\Delta$ avec

$$\begin{array}{rcl} N^1_\Delta & := & \text{Fibré normal de } C^\varepsilon_\Delta \text{ dans } M^{T_\Delta} \\ N^2_\Delta & := & \text{Fibré normal de } M^{T_\Delta} \text{ dans } M, \ \ \text{restreint à } C^\varepsilon_\Delta \ . \end{array}$$

On peut supposer (quitte à modifier U_Δ) qu'il existe un difféomorphisme T-invariant, noté ψ^1_Δ, d'un voisinage $\mathcal{W}'_\Delta$ de la section nulle de $N(C^\varepsilon_\Delta \subset M)$ sur l'ouvert U_Δ de M tel que

$$\begin{array}{rcl} \psi^1_\Delta(m,0) & = & m \ \ \text{pour } m \in C^\varepsilon_\Delta \\ \mathbf{T}\psi^1_{\Delta|C^\varepsilon_\Delta} & = & Id \ \ \text{l'isomorphisme canonique } \mathbf{T}\mathcal{W}'_{\Delta|C^\varepsilon_\Delta} \to \mathbf{T}M_{|C^\varepsilon_\Delta} \ . \end{array} \tag{6.36}$$

Ensuite, nous remarquons que le fibré N^1_Δ est trivial au dessus de C^ε_Δ. Au moyen de l'application moment, nous réalisons l'isomorphisme de fibré

$$\begin{array}{rcl} \psi^2_\Delta : N^2_\Delta \times N^1_\Delta & \longrightarrow & N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta} \\ (m,w,v) & \longmapsto & (m,w,\mathbf{T}\mu_m(v)) \ , \end{array} \tag{6.37}$$

où $\overrightarrow{\Delta}$ est la direction vectorielle du sous espace affine Δ de $\mathfrak{t}^*$.

On note $N_\Delta = N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}$, le fibré euclidien sur C^ε_Δ où le produit scalaire sur les fibres de N^2_Δ est induit par la métrique sur M, tandis que sur $\overrightarrow{\Delta}$ nous avons le produit scalaire provenant du produit scalaire de $\mathfrak{t}^*$.

On pose $\mathcal{W}_\Delta = \psi^2_\Delta(\mathcal{W}'_\Delta)$ et on note $\psi_\Delta := \psi^1_\Delta \circ (\psi^2_\Delta)^{-1}$ l'isomorphisme T-invariant du voisinage ouvert $\mathcal{W}_\Delta$ de C^ε_Δ dans N_Δ sur le voisinage tubulaire U_Δ:

$$\psi_\Delta : \mathcal{W}_\Delta \subset N_\Delta \xrightarrow{\sim} U_\Delta \subset M \ . \tag{6.38}$$

Nous allons définir sur N_Δ une 1-forme T-invariante λ_Δ que nous relèverons, à travers l'isomorphisme ψ_Δ, en une 1-forme sur U_Δ. Nous avons besoin du

Lemme 6.10 *Soient $\varepsilon \in W$ et $\Delta \in \mathcal{B}$. L'isomorphisme $j : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}^*$ permet de définir le vecteur $\beta_\Delta = j^{-1}(\beta(\varepsilon,\Delta) - \varepsilon)$ de $\mathfrak{t}_\Delta$. Le champ de vecteurs sur N^2_Δ engendré par β_Δ s'annule exactement sur C^ε_Δ, c'est à dire*

$$C^\varepsilon_\Delta = M^{T_\Delta} \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon,\Delta)) = M(\beta_{\Delta|M}) \cap \mu^{-1}(\beta(\varepsilon,\Delta)) \ .$$

Démonstration: Supposons le contraire: $N^2_\Delta(\beta_{\Delta|N^2_\Delta}) \neq C^\varepsilon_\Delta$. Cela signifie qu'au voisinage de C^ε_Δ nous avons l'inclusion *stricte* $M^{T_\Delta} \subset M(\beta_{\Delta|M})$. Il existe donc une composante connexe $\mathcal{Z}$ de M^{T_Δ} telle que $\mu(\mathcal{Z}) = P$, $\mathrm{Aff}(P) = \Delta$ et une composante connexe $\mathcal{Z}'$ de $M(\beta_{\Delta|M})$ qui contient strictement $\mathcal{Z}$. On voit alors que $P \subset P' = \mu(\mathcal{Z}')$ où P' est un polytope de $\mathcal{B}'$ de dimension *strictement* supérieure à celle de P: sinon $\mathcal{Z}'$ serait dans M^{T_Δ} et donc égal à $\mathcal{Z}$, ce qui est exclu.

Le paramètre ε est choisi dans W, ce qui implique à fortiori $\varepsilon \in W_{\Delta'}$, $\mathrm{Aff}(P') = \Delta'$: cette hypothèse impose que $\beta(\varepsilon, \Delta') \notin P_1$ pour tout polytope $P_1 \subset P'$ de dimension strictement inférieure à P'. Nous aboutissons donc à une contradiction puisque $\beta(\varepsilon, \Delta') = \beta(\varepsilon, \Delta) \in P$. $\square$

Le groupe T/T_Δ agit localement librement sur le fibré vectoriel $N^2_\Delta \to C^\varepsilon_\Delta$: considérons, sur ce fibré, une connexion euclidienne T-invariante $\nabla^{N^2_\Delta}$ qui est T/T_Δ-horizontale:

$$\forall\, Y \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta, \qquad \mu^{N^2_\Delta}(Y) = 0\ .$$

On rappelle que cette connexion donne une décomposition de l'espace tangent $\mathbf{T}N^2_\Delta$ en sous-espace vertical VN^2_Δ et sous-espace horizontal HN^2_Δ: $\mathbf{T}N^2_\Delta = VN^2_\Delta \oplus HN^2_\Delta$. Cet décomposition induit une projection ${}^V : \mathbf{T}N^2_\Delta \to VN^2_\Delta$.

Définition 6.11 *Soit $(\cdot,\cdot)_o$ la structure euclidienne sur le fibré vectoriel N^2_Δ. On note θ_{β_Δ} la 1-forme T-invariante et T/T_Δ-basique de $\mathcal{A}(N^2_\Delta)$ définie par $\theta_{\beta_\Delta}(Z) := (\beta_{\Delta|N^2_\Delta}, Z^V)_o$ pour tout champ de vecteurs Z sur N^2_Δ.*

La forme θ_{β_Δ} est bien définie car le champ de vecteurs $\beta_{\Delta|N^2_\Delta}$ est vertical. Cette forme est T-invariante car le champ de vecteurs $\beta_{\Delta|N^2_\Delta}$, la projection ^{V} et le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_o$ sont T-invariants. De plus, elle est T/T_Δ-basique car pour tout $Y \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ nous avons:

$$\theta_{\beta_\Delta}(Y_{N^2_\Delta})(m,w) = \left(\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)_{|m}.w, \mu^{N^2_\Delta}(Y)_{|m}.w\right)_o = 0\ .$$

Dans cette égalité on se sert du fait que pour $X \in \mathfrak{t}$, la partie verticale du champ de vecteurs $X_{N^2_\Delta}$ en $(m,w) \in N^2_\Delta$ est égale à $-\mu^{N^2_\Delta}(X)_{|m}.w \in N^2_{\Delta|m}$.

L'espace quotient $\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta := C^\varepsilon_\Delta \big/ (T/T_\Delta)$ possède une structure de V-variété [22]. Soit $F^1, \ldots, F^{r_2}$ une base orthonormée de $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$. La structure riemannienne sur M permet de définir une 1-forme de connexion $\sigma_\Delta \in \mathcal{A}^1(C^\varepsilon_\Delta) \otimes \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ sur le V-fibré principal $C^\varepsilon_\Delta \to \mathcal{M}^\varepsilon_\Delta$, comme restriction de

$$\sum_{i=1}^{r_2} (F^i_M, \cdot)_M F^i \ \in \mathcal{A}^1(M) \otimes \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$$

sur la sous-variété C^ε_Δ. On décompose la connexion $\sigma_\Delta := \sum_{1 \le k \le r_2} \sigma_k \otimes F^k$ avec $\sigma_k \in \mathcal{A}^1(C^\varepsilon_\Delta)^T$, et on définit une 1-forme γ_Δ sur $C^\varepsilon_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}$ en posant

$$\text{pour } (m,\xi) \in C^\varepsilon_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}, \qquad \gamma_{\Delta(m,\xi)} = \sum_{k=1}^{r_2} \sigma_{k|m} \langle \xi, F^k \rangle\ . \tag{6.39}$$

Les projections $N_\Delta \to C^\varepsilon_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}$ et $N_\Delta \to N^2_\Delta$ définissent les injections $\mathcal{A}(C^\varepsilon_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}) \hookrightarrow \mathcal{A}(N_\Delta)$ et $\mathcal{A}(N^2_\Delta) \hookrightarrow \mathcal{A}(N_\Delta)$.

Les formes θ_{β_Δ} et γ_Δ introduites dans la Définition 6.11 et l'équation (6.39) appartiennent à $\mathcal{A}^1(N_\Delta)$, et permettent de définir sur N_Δ la forme $\lambda_\Delta \in \mathcal{A}^1(N_\Delta)$:

Définition 6.12 *On note λ_Δ la 1-forme T-invariante sur N_Δ définie par*

$$\lambda_\Delta = \theta_{\beta_\Delta} + \gamma_\Delta \ .$$

C'est à dire: $\quad \forall\ (m, w, \xi) \in N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}, \qquad \lambda_{\Delta\,(m,w,\xi)} = \theta_{\beta_{\Delta}\,(m,w)} + \langle \xi, \sigma_{\Delta\,|m} \rangle \ .$

L'application Φ_{λ_Δ} admet la décomposition $\Phi_{\lambda_\Delta} = \Phi_{\theta_\beta} + \Phi_{\gamma_\Delta}$, avec $\forall\ (m, w, \xi) \in N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}$, $\Phi_{\gamma_\Delta}(m, w, \xi) = \xi$ et $\langle \Phi_{\theta_\beta}, X \rangle(m, w, \xi) = \left(\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)_{|m}.w, \mu^{N^2_\Delta}(X)_{|m}.w\right)_o$ pour $X \in \mathfrak{t}$.

L'application moment se relève à travers ψ_Δ (cf. (6.38)) en une application $\mu_\Delta = \mu \circ (\psi_\Delta)^{-1}$ définie sur $\mathcal{W}_\Delta$.

La proposition suivante est le point essentiel dans la modification de la forme λ^ε.

Proposition 6.13 *Il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\mu_\Delta - \varepsilon) \rangle(m, w, \xi) \geq A(\|\xi\|^2 + \|w\|^2_o) \tag{6.40}$$

pour tout (m, w, ξ) suffisamment proche de C^ε_Δ. Cette minoration assure que la fonction $\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\mu_\Delta - \varepsilon) \rangle$ est positive sur un voisinage de C^ε_Δ dans $\mathcal{W}_\Delta$.

Dans la suite de cette section, nous supposerons – quitte à restreindre U_Δ et $\mathcal{W}_\Delta$ – que la minoration (6.40) est vérifiée sur tout l'ouvert $\mathcal{W}_\Delta$.

Démonstration: Effectuons le développement limité au premier ordre de l'application μ_Δ au voisinage de $m \in C^\varepsilon_\Delta$: comme $\mathbf{T}\psi^1_{\Delta|C^\varepsilon_\Delta} = Id$ on a $\mathbf{T}\mu_{\Delta|m} = \mathbf{T}\mu_m \circ \mathbf{T}(\psi^2_\Delta)^{-1}_m$ pour tout $m \in C^\varepsilon_\Delta$. On voit donc que

$$\begin{aligned} \mu_\Delta(m, w, \xi) &= \mu(m) + \mathbf{T}\mu_m(w) + \mathbf{T}\mu_m \circ (\mathbf{T}\mu_m)^{-1}(\xi) + O(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2) \\ &= \beta(\varepsilon, \Delta) + \xi + O(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2) \ . \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité on se sert du fait que $\langle \mathbf{T}\mu_m(w), X \rangle = \Omega_m(X_M, w) = 0$ car N^2_Δ est Ω-orthogonal à $\mathbf{T}C^\varepsilon_\Delta$.

On a alors $j^{-1}(\mu_\Delta - \varepsilon)(m, w, \xi) = \beta_\Delta + j^{-1}(\xi) + O(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2)$, ce qui impose, sachant que Φ_{λ_Δ} est nulle sur C^ε_Δ,

$$\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\mu_\Delta - \varepsilon) \rangle(m, w, \xi) = \langle \Phi_{\lambda_\Delta}, \beta_\Delta \rangle(m, w, \xi) + \langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\xi) \rangle(m, w, \xi) + o(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2).$$

On vérifie ensuite que $\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, \beta_\Delta \rangle(m, w, \xi) = \langle \Phi_{\theta_\beta}, \beta_\Delta \rangle(m, w, \xi) = \|\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)_{|m}.w\|^2_o$, et que $\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\xi) \rangle(m, w, \xi) = \|\xi\|^2 + o(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2)$.

On obtient finalement

$$\langle \Phi_{\lambda_\Delta}, j^{-1}(\mu_\Delta - \varepsilon)\rangle(m,w,\xi) = \|\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)_{|m}.w\|^2_o + \|\xi\|^2 + o(\|w\|^2_o + \|\xi\|^2).$$

Le Lemme 6.10 affirme que le champ de vecteurs sur N^2_Δ engendré par β_Δ s'annule exactement sur C^ε_Δ. En conséquence l'endomorphisme $\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)$ est inversible en tout point de C^ε_Δ, et on a alors une minoration de la forme $\|\mu^{N^2_\Delta}(\beta_\Delta)_{|m}.w\|^2_o \geq A'\|w\|^2_o$ où $A' > 0$, qui est valable pour tout $m \in C^\varepsilon_\Delta$ et $w \in N^2_{\Delta|m}$. □

On se propose maintenant de modifier la forme de localisation λ^ε en λ_{mod} sans changer l'endroit où les formes équivariantes fermées sont localisées.

Les ouverts U_Δ, $\Delta \in \mathcal{B}$, ont été définis précédemment. Quitte à les restreindre, on peut supposer qu'ils sont disjoints.

Soit U'_Δ le voisinage de C^ε_Δ dans M défini par: $U'_\Delta = \psi_\Delta(\frac{1}{2}\mathcal{W}_\Delta)$ où le terme $\frac{1}{2}$ représente une contraction de facteur $1/2$ sur les fibres de N_Δ.

Au moyen de l'ouvert $U_{ext} = M - \cup_{\Delta\in\mathcal{B}}\overline{U'_\Delta}$, on réalise une partition de l'unité

$$\{(U_\Delta, \chi_\Delta)_{\Delta\in\mathcal{B}},\ (U_{ext}, \chi_{ext})\}$$

de la variété M. Pour tout $\Delta \in \mathcal{B}$, les fonctions χ_Δ sont positives, à support dans U_Δ, T-invariantes et égales à 1 sur U'_Δ. La fonction χ_{ext} est positive, à support dans U_{ext}, T-invariante et elle vérifie l'équation:

$$\sum_{\Delta\in\mathcal{B}} \chi_\Delta + \chi_{ext} = 1 \ . \tag{6.41}$$

On peut maintenant définir la forme λ_{mod} et montrer qu'elle localise encore les formes équivariantes fermées sur $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Proposition 6.14 *Considérons la forme λ_{mod} définie par l'équation*

$$\lambda_{mod} := \chi_{ext}\lambda^\varepsilon + \sum_{\Delta\in\mathcal{B}} \chi_\Delta(\psi_\Delta^{-1})^*(\lambda_\Delta) \ .$$

C'est une forme T-invariante qui effectue la même localisation que λ: en particulier $\{\Phi_{\lambda_{mod}} = 0\} = \mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$.

Démonstration: Soit $\Delta \in \mathcal{B}$. Si $C^\varepsilon_\Delta = \emptyset$, le terme correspondant à Δ dans λ_{mod} est nul. Dans le cas contraire, la forme $(\psi_\Delta^{-1})^*(\lambda_\Delta)$ est définie sur l'ouvert U_Δ tandis que la fonction χ_Δ a son support dans U_Δ. Les formes $\chi_\Delta(\psi_\Delta^{-1})^*(\lambda_\Delta)$ sont donc définies sur M et T-invariantes.

Considérons la fonction $\mathrm{f} : M \to \mathfrak{t}$ égale à $j^{-1}(\mu_\varepsilon)$ et montrons que les hypothèses de la Proposition 3.11 sont vérifiées avec les formes λ^ε, λ_{mod} et la fonction f. Notre proposition sera alors démontrée.

On remarque tout d'abord que $\langle \Phi_\lambda, j^{-1}(\mu_\varepsilon)\rangle = \|\mathcal{H}^\varepsilon\|^2$ est strictement positive en dehors de $\mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$. Soit $m \in \mathrm{Cr}(\|\mu_\varepsilon\|^2)$, il existe alors $\Delta \in \mathcal{B}$ tel que $m \in C^\varepsilon_\Delta$. L'application

$\Phi_{\lambda_{mod}}$ est nulle en m puisqu'au voisinage de C^{ε}_{Δ} la forme λ_{mod} est égale à $(\psi_{\Delta}^{-1})^{*}(\lambda_{\Delta})$ et en m nous avons $\lambda_{\Delta|m} = 0$. L'inclusion $\mathrm{Cr}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2) \subset \{\Phi_{\lambda_{mod}} = 0\}$ est démontrée.

La fonction $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, j^{-1}(\mu_{\varepsilon})\rangle$ se décompose, d'après la Proposition 6.13, en une somme de fonctions positives

$$\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, j^{-1}(\mu_{\varepsilon})\rangle = \chi_{ext}\|\mathcal{H}^{\varepsilon}\|^2 + \sum_{\Delta\in\mathcal{B}} \chi_{\Delta}\langle \Phi_{\lambda_{\Delta}}, j^{-1}(\mu_{\Delta} - \varepsilon)\rangle \circ \psi_{\Delta}^{-1} \ .$$

Supposons que $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, j^{-1}(\mu_{\varepsilon})\rangle$ est nulle en m, alors

$$\begin{aligned} \chi_{ext}(m)\|\mathcal{H}^{\varepsilon}_{m}\|^2 &= 0 \\ \chi_{\Delta}(m)\langle \Phi_{\lambda_{\Delta}}, j^{-1}(\mu_{\Delta} - \varepsilon)\rangle \circ \psi_{\Delta}^{-1}(m) &= 0, \qquad \forall\ \Delta \in \mathcal{B} \ . \end{aligned}$$

Considérons la première égalité:

– Soit $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{m} = 0$, ce qui implique $d(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)_m = 0$.

– Soit $\chi_{ext}(m) = 0$. D'après (6.41), il existe alors $\Delta \in \mathcal{B}$ avec $\chi_{\Delta}(m) \neq 0$. Ceci entraine que $m \in U_{\Delta}$ et $\langle \Phi_{\lambda_{\Delta}}, j^{-1}(\mu_{\Delta} - \varepsilon)\rangle \circ \psi_{\Delta}^{-1}(m) = 0$. D'après la Proposition 6.13, cette dernière égalité implique que $m \in C^{\varepsilon}_{\Delta}$. Dans tous les cas $m \in \mathrm{Cr}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)$.

On a finalement démontré que $\Phi_{\lambda_{mod}}$ est nulle sur $\mathrm{Cr}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)$ et que $\langle \Phi_{\lambda_{mod}}, j^{-1}(\mu_{\varepsilon})\rangle$ est strictement positive en dehors de $\mathrm{Cr}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)$. $\square$

Dans la prochaine sous-section nous effectuons la localisation sur $\mathrm{Cr}(\|\mu_{\varepsilon}\|^2)$ au moyen de la forme λ_{mod}.

6.3 Calcul de la localisation avec λ_{mod}

Considérons, pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}$, des fonctions $\chi'_{\Delta} \in \mathcal{C}^{\infty}(M)^T$ telles que le support de χ'_{Δ} soit inclus dans l'ouvert U'_{Δ} défini précedemment, et égales à 1 au voisinage de C^{ε}_{Δ}. Si $C^{\varepsilon}_{\Delta} = \emptyset$ alors $U'_{\Delta} = \emptyset$ et la fonction χ'_{Δ} est nulle.

Procédons de la même manière qu'à la section 3. On définit au moyen de la 1-forme λ_{mod} l'application de localisation

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{A}^{\infty}_{T}(M) &\longrightarrow \oplus_{\Delta}\mathcal{A}^{-\infty}_{T}(U'_{\Delta}) \\ \eta &\longmapsto \oplus_{\Delta}\Theta_{\Delta}(\eta) \end{aligned}$$

avec

$$\Theta_{\Delta}(\eta) := \Big(\chi'_{\Delta} + d\chi'_{\Delta}\Big(\int_0^{\infty} \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_{mod}}dt\Big)\lambda_{mod}\Big)\, \eta \ .$$

Au moyen des isomorphismes ψ_{Δ} on se ramène sur les voisinages $\mathcal{W}_{\Delta}$ de la section nulle dans N_{Δ}. L'intégration sur les fibres de chaque N_{Δ} donne au niveau de la cohomologie un morphisme

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{H}^{\infty}_{T}(M) &\longrightarrow \oplus_{\Delta}\mathcal{H}^{-\infty}_{T}(C^{\varepsilon}_{\Delta}) \\ \eta &\longmapsto \oplus_{\Delta} i^{*}_{\Delta}(\eta)\Lambda_{\Delta} \ . \end{aligned}$$

On a vu à la sous-section 3.2 que $\Lambda_\Delta = \lim_{a\to+\infty} \Lambda^a_\Delta$, avec

$$\Lambda^a_\Delta = \int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda_\Delta} + \mathrm{i}\,\mathcal{D}\left(\int_0^a \left(\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_\Delta}\lambda_\Delta\right)dt\right) ,$$

avec $\psi^*_\Delta(\chi'_\Delta) = \chi''_\Delta$. Dans cette dernière identité on se sert du fait que $\psi^*_\Delta(\lambda_{mod|U'_\Delta}) = \lambda_\Delta$.

Pour conclure on a besoin du lemme suivant

Lemme 6.15

$$1) \qquad \int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_\Delta}\lambda_\Delta = 0 , \quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

$$2) \qquad \lim_{a\to+\infty}\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda_\Delta} = \int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\lambda_\Delta} .$$

Démonstration 1): En utilisant la décomposition $\lambda_\Delta = \theta_{\beta_\Delta} + \gamma_\Delta$ on obtient

$$\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\lambda_\Delta}\lambda_\Delta =$$
$$\int_{N^2_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\theta_{\beta_\Delta}} \underbrace{\left(\int_{\vec\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\gamma_\Delta}\gamma_\Delta\right)}_{\mathbf{1}} + \int_{\vec\Delta} e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\gamma_\Delta} \underbrace{\left(\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\theta_{\beta_\Delta}}\theta_{\beta_\Delta}\right)}_{\mathbf{2}} .$$

Le terme 2 est nul d'après la Remarque 4.4. De la même façon, la forme $e^{-\mathrm{i}t\mathcal{D}\gamma_\Delta}\gamma_\Delta$ ne possède pas de composante de degré maximum dans la direction de $\overrightarrow{\Delta}$: le terme 1 est donc nul. □

Démonstration 2): Considérons la contraction δ_a, $a>0$, effectuée au niveau des fibres de $N_\Delta \to C^\varepsilon_\Delta$, définie par

$$\begin{aligned} \delta_a : N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta} &\longrightarrow N^2_\Delta \times \overrightarrow{\Delta} \\ (m,w,\xi) &\longmapsto (m, \frac{w}{\sqrt{a}}, \frac{\xi}{a}) . \end{aligned} \tag{6.42}$$

La forme λ_Δ a une dépendance linéaire par rapport à $\xi\in\overrightarrow{\Delta}$ et une dépendance quadratique sur les fibres de N^2_Δ. On a donc $a\delta^*_a(\lambda_\Delta) = \lambda_\Delta$.On vérifie aussi que $a\delta^*_a(\lambda_\Delta(X_{N_\Delta})) = \lambda_\Delta(X_{N_\Delta})$, $X\in\mathfrak{t}$. Ainsi, en effectuant le changement de variable "δ_a" dans l'intégrale $\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda_\Delta}$ on trouve

$$\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda_\Delta} = \int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} \chi''_\Delta \circ \delta_a\ e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\lambda_\Delta} .$$

Comme la fonction χ''_Δ est égale à 1 au voisinage de la section nulle nous avons $\lim_{a\to+\infty}\chi''_\Delta\circ\delta_a = 1$. En utilisant un argument "à la Lebesgue" on conclut finalement que la forme $\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta}\chi''_\Delta e^{-\mathrm{i}a\mathcal{D}\lambda_\Delta}$ converge vers la forme à coefficients généralisés $\int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\lambda_\Delta}$.
□

Théorème 6.16 *Nous avons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_T^{\infty}(M) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[dr, "I"'] & \oplus_\Delta \mathcal{H}_T^{-\infty}(C_\Delta^\varepsilon) \arrow[d, "i_*"] \\ & \mathcal{H}_T^{-\infty}(M) \end{tikzcd} \tag{6.43}$$

où $i = \oplus_\Delta i_\Delta : \cup_\Delta C_\Delta^\varepsilon \to M$ *est l'inclusion. Le morphisme* Λ *est défini par*

$$\Lambda(\eta) = \oplus_{\Delta\in\mathcal{B}}\ i_\Delta^*(\eta)\Lambda_\Delta\ ,$$

avec, pour tout $\Delta \in \mathcal{B}$,

$$\Lambda_\Delta = \int_{N_\Delta/C_\Delta^\varepsilon} e^{-\mathrm{i}\,\mathcal{D}\lambda_\Delta}\ .$$

6.4 Etude de la forme Λ_Δ

L'espace quotient $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon := C_\Delta^\varepsilon \big/ T/T_\Delta$ possède une structure de V-variété [17]. On rappelle que les formes différentielles de $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ sont définies comme les éléments T/T_Δ-basiques de l'algèbre $\mathcal{A}(C_\Delta^\varepsilon)$. Ces éléments forment une sous-algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ qui est stable par rapport à la differentiation extérieure. On notera $\mathcal{H}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ la cohomologie associée.

La V-variété $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ possède une 2-forme symplectique induite par la 2-forme Ω [24]; elle est ainsi orientée. On a donc une opération d'intégration sur $\mathcal{H}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$ que l'on notera $\int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon}$.

Pour chaque composante connexe F de C_Δ^ε, on appelle stabilisateur générique de F le sous groupe $S^\Delta(F) := \cap_{m\in F}\,\mathrm{Stab}(m)$. On rappelle qu'il existe un ouvert dense de F sur lequel $\mathrm{Stab}(m) = S^\Delta(F)$. Soit $|S^\Delta(F)|$ le cardinal de $S^\Delta(F)$. L'application $F \to |S^\Delta(F)|$ détermine une fonction localement constante sur $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ que l'on note $|S^\Delta|$.

La structure riemannienne a été choisie de telle manière que pour tout $F \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, $(F_M, F_M)_M = \|F\|_\mathfrak{t}^2$ sur C_Δ^ε. La 1-forme de connexion $\sigma_\Delta = \sum_{k=1}^{r_2} \sigma_k \otimes F^k$ sur le V-fibré principal $C_\Delta^\varepsilon \to \mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ a déjà été définie.

Nous choisissons une orientation de C_Δ^ε, notée $o(C_\Delta^\varepsilon)$, qui est donnée par la relation

$$o(C_\Delta^\varepsilon) = o(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \wedge \sigma_{r_2} \wedge \cdots \wedge \sigma_1\ . \tag{6.44}$$

Dans la suite de cette section on note $\{F_1, \cdots, F_{r_2}\}$ la base de $\overrightarrow{\Delta} \cong (\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta)^*$ duale de $\{F^1, \cdots, F^{r_2}\}$. Le volume $\mathrm{vol}(T/T_\Delta)$ est calculé avec la mesure de Haar compatible avec la forme volume $F_1 \wedge \cdots \wedge F_{r_2}$. Ainsi, pour tout $\eta \in \mathcal{A}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon)$, on a la relation

$$\int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon} \frac{1}{|S^\Delta|}\,\eta\ := \frac{1}{\mathrm{vol}(T/T_\Delta)} \int_{C_\Delta^\varepsilon} \eta \wedge \sigma_{r_2} \wedge \cdots \wedge \sigma_1\ . \tag{6.45}$$

On remarque que la forme différentielle $\frac{\sigma_{r_2}\wedge\ldots\wedge\sigma_1}{Vol(T/T_\Delta)}$, bien que définie au moyen de la base $\{F^1,\ldots,F^{r_2}\}$, ne dépend que de la connexion σ_Δ et de l'orientation de C^ε_Δ.

Puisque le groupe T agit trivialement sur $\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta$, on a

$$\mathcal{A}^{-\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta) := \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}(\mathfrak{t}_\Delta), \mathcal{A}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^{\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta) := \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{A}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta))\ ,$$

et de la même façon $\mathcal{A}^{-\infty}_{T/T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ et $\mathcal{A}^{\infty}_{T/T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$.

On désigne par $S(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta)$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$. Pour tout élément $P\in S(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta)$, on note $P(\frac{\partial}{\partial X_2}\big|_0)$ l'application

$$P(\frac{\partial}{\partial X_2}\Big|_0) : \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t}_\Delta) \tag{6.46}$$

définie pour $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t})$ par $\left(P(\frac{\partial}{\partial X_2}\big|_0)f\right)(X_1) = \left(P(\frac{\partial}{\partial X_2})f\right)(X_1+X_2)\Big|_{X_2=0}$.

L'application (6.46) peut être étendue aux formes équivariantes:

$$P(\frac{\partial}{\partial X_2}\Big|_0) : \mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta) \longrightarrow \mathcal{A}^\infty_{T_\Delta}(C^\varepsilon_\Delta)\ .$$

Soit $\omega_\Delta := d\sigma_\Delta$ la courbure du fibré principal $C^\varepsilon_\Delta \to \mathcal{M}^\varepsilon_\Delta$: $\omega_\Delta\in\mathcal{A}^2(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)\otimes\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$. Dans ce cadre, l'élément $e^{\omega_\Delta}\in S(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta)\otimes\mathcal{A}^{pair}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ définit une opération

$$e^{\omega_\Delta(\frac{\partial}{\partial X_2}\big|_0)} : \mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta) \longrightarrow \mathcal{A}^\infty_{T_\Delta}(C^\varepsilon_\Delta)$$

que l'on notera aussi $\eta(X_1+\omega_\Delta) :=< e^{\omega_\Delta(\frac{\partial}{\partial X_2}\big|_0)}, \eta(X_1+X_2) >\quad, \forall\eta\in\mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta)$.

Au moyen de la connexion σ_Δ, nous définissons une projection sur les éléments horizontaux de $\mathcal{A}(C^\varepsilon_\Delta)$: $[\ \ ]_{hor} : \mathcal{A}(C^\varepsilon_\Delta) \longrightarrow \mathcal{A}(C^\varepsilon_\Delta)_{hor}$.

L'application de Chern-Weil $W_\Delta : \mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta) \longrightarrow \mathcal{A}^\infty_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ est déterminée par

$$\forall\eta\in\mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta), \qquad W_\Delta(\eta) := [\eta(X_1+\omega_\Delta)]_{hor}\ .$$

Cette application commute avec les différentielles et définit un isomorphisme au niveau de la cohomologie [12] (que l'on note encore W_Δ).

Définition 6.17 *On note k_Δ le morphisme de Kirwan de $\mathcal{H}^\infty_T(M)$ dans $\mathcal{H}^\infty_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ qui correspond à la composée de l'opération de restriction $i^*_\Delta : \mathcal{H}^\infty_T(M) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta)$ et de l'isomorphisme de Chern-Weil $W_\Delta : \mathcal{H}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^\infty_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$.*

L'espace vectoriel $\mathfrak{t}$ se décompose, pour chaque $\Delta\in\mathcal{B}$, en la somme des sous-espaces vectoriels $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$. Cette décomposition permet d'associer à chaque couple de fonctions sur $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ une fonction de $\mathfrak{t}$. On notera $\diamond$ l'opération

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta)\times\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}) \\ (f\,,\,g) & \longmapsto & f\diamond g\ . \end{array}$$

Elle est définie par la relation: $\forall\phi(X)dX \in \mathfrak{m}(\mathfrak{t})$

$$< f \diamond g, \phi(X)dX >:=< f, < g, \phi(X_1+X_2)dX_1 > dX_2 >$$

avec $X_1 \in \mathfrak{t}_\Delta$, $X_2 \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ et la mesure de Lebesgue dX que l'on décompose (de manière non canonique) en un produit $dX = dX_1 dX_2$ de deux mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$.

Ce “produit” peut être défini de la même façon sur les formes à coefficients généralisés:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{-\infty}_{T_\Delta}(C^\varepsilon_\Delta) \times \mathcal{A}^{-\infty}_{T/T_\Delta}(C^\varepsilon_\Delta) & \longrightarrow & \mathcal{A}^{-\infty}_T(C^\varepsilon_\Delta) \\ (\eta\,,\nu) & \longmapsto & \eta \diamond \nu \ . \end{array} \tag{6.47}$$

Nous allons maintenant donner une nouvelle expression de la fonction généralisée Λ_Δ. On rappelle que

$$\Lambda_\Delta = \int_{N_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\lambda_\Delta} \ ,$$

avec la forme T-invariante $\lambda_\Delta = \theta_{\beta_\Delta} + \gamma_\Delta$.

La forme θ_{β_Δ} a été définie au moyen d'une connexion T/T_Δ-horizontale: $\theta_{\beta_\Delta}(X_{N_\Delta}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, tandis que la forme γ_Δ vérifie $\gamma_\Delta(X_{N_\Delta}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{t}_\Delta$. On voit donc que $\mathcal{D}\lambda_{\Delta\,(m,w,\xi)}(X_1+X_2) = \mathcal{D}\theta_{\beta_{\Delta\,(m,w)}}(X_1) + \mathcal{D}\gamma_{\Delta\,(m,\xi)}(X_2)$ pour $(X_1,X_2) \in \mathfrak{t}_\Delta \times \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$, $m \in C^\varepsilon_\Delta$, $\xi \in \overrightarrow{\Delta}$, et $w \in N^2_{\Delta|m}$.

On peut donc écrire Λ_Δ sous la forme

$$\Lambda_\Delta(X_1+X_2) = \left(\int_{N^2_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_{\beta_\Delta}}\right)(X_1) \diamond \left(\int_{\overrightarrow{\Delta}} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\gamma_\Delta}\right)(X_2) \ , \tag{6.48}$$

avec $(X_1,X_2) \in \mathfrak{t}_\Delta \times \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$. La forme $X_1 \to \int_{N^2_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_{\beta_\Delta}(X_1)}$ est la restriction à T_Δ de la forme $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(N^2_\Delta) \in \mathcal{A}^{-\infty}_T(C^\varepsilon_\Delta)$. D'après le Lemme 6.10 le champ de vecteurs sur N^2_Δ engendré par β_Δ s'annule exactement sur C^ε_Δ. La forme $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(N^2_\Delta)$ est donc bien définie puisque l'Hypothèse 4.1 est vérifiée.

D'autre part, on constate que pour $Y \in \mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$

$$c(Y_{C^\varepsilon_\Delta})\,\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(N^2_\Delta) = -\mathrm{i}\int_{N^2_\Delta/C^\varepsilon_\Delta} c(Y_{N^2_\Delta})(d\theta_{\beta_\Delta})e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\theta_{\beta_\Delta}} = 0 \ .$$

La forme $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(N^2_\Delta)$ appartient donc à $\mathcal{A}^{-\infty}_T(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$.

Définition 6.18 *On note* $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(\mathcal{E}_\Delta) \in \mathcal{A}^{-\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ *la restriction de la forme* $\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(N^2_\Delta)$ *à* T_Δ.

Remarque: La notation $\mathcal{E}_\Delta$ est celle du V-fibré vectoriel $N^2_\Delta/(T/T_\Delta) \to \mathcal{M}^\varepsilon_\Delta$.

Les formes $\int_{\overrightarrow{\Delta}} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\gamma_\Delta}$ associées à une action libre ont été introduites par Kumar et Vergne dans [19], Proposition 79. Dans le cas présent, on a besoin de connaitre l'orientation de $\overrightarrow{\Delta}$.

Le fibré vectoriel N^1_Δ est le fibré normal de C^ε_Δ dans M^{T_Δ}: il est orienté par la forme symplectique Ω. Nous avons, grâce à la trivialisation (6.37), identifié N^1_Δ à $C^\varepsilon_\Delta \times \overrightarrow{\Delta}$. L'orientation, $o(C^\varepsilon_\Delta)$, de C^ε_Δ a été définie au moyen d'une base $F^1, \cdots, F^{r_2}$ de $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ par l'égalité (6.44). Par un calcul soigneux, on vérifie que

$$o(N^1_\Delta) \cong o(C^\varepsilon_\Delta) \wedge dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^{r_2} \ . \tag{6.49}$$

Nous pouvons donc intégrer sur $\overrightarrow{\Delta}$ qui est orienté par $dF^1 \wedge \ldots \wedge dF^{r_2}$.

Définition 6.19 *Soit ω_Δ la courbure du V-fibré principal $C^\varepsilon_\Delta \to \mathcal{M}^\varepsilon_\Delta$. Cette donnée détermine la forme équivariante $\delta(X_2 - \omega_\Delta) \in \mathcal{A}^{-\infty}_{T/T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta)$ par la formule*

$$< \delta(X_2 - \omega_\Delta), \phi(X_2)dX_2 >= \phi(\omega_\Delta)\,\mathrm{vol}(T/T_\Delta, dX_2),$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta)$. Dans cette expression dX_2 est une mesure euclidienne sur $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathrm{vol}(T/T_\Delta, dX_2)$ est le volume du groupe T/T_Δ pour la mesure de Haar compatible avec dX_2.

Les formes du type $\delta(X_2 - \omega_\Delta)$ sont aussi introduites par Kumar et Vergne dans [19, 23], sans utiliser la forme linéaire $dX_2 \to \mathrm{vol}(T/T_\Delta, dX_2)$. L'égalité

$$\int_{\vec{\Delta}} e^{-\mathrm{i}\mathcal{D}\gamma_\Delta}(X_2) = (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta}\ \delta(X_2 - \omega_\Delta) \wedge \frac{\sigma_{r_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_1}{\mathrm{vol}(T/T_\Delta)} \tag{6.50}$$

découle de la Proposition 80 de [19].

Proposition 6.20 *1) Nous avons l'égalité suivante dans $\mathcal{A}^{-\infty}_T(C^\varepsilon_\Delta)$:*

$$\Lambda_\Delta(X) = (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta}\,\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(\mathcal{E}_\Delta)(X_1) \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta) \wedge \frac{\sigma_{r_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_1}{\mathrm{vol}(T/T_\Delta)} \ .$$

2) Pour toute forme $\eta \in \mathcal{A}^\infty_T(C^\varepsilon_\Delta)$

$$\Big(i^*_\Delta(\eta) \wedge \Lambda_\Delta\Big)(X) = (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta}\Big(k_\Delta(\eta)\,\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(\mathcal{E}_\Delta)\Big)(X_1) \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta) \wedge \frac{\sigma_{r_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_1}{\mathrm{vol}(T/T_\Delta)} \ .$$

Démonstration: Le point 1) découle des égalités (6.48) et (6.50). Pour démontrer le deuxième point, il suffit de voir que $\eta(X) \wedge \Big(1_{\mathfrak{t}_\Delta} \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta)\Big) = \eta(X_1 + \omega_\Delta) \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta)$, et que pour toute forme $\alpha \in \mathcal{A}(C^\varepsilon_\Delta)$ qui est T/T_Δ-invariante, on a $\alpha \wedge \sigma_{r_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_1 = [\alpha]_{hor} \wedge \sigma_{r_2} \wedge \ldots \wedge \sigma_1$. □

Le Théorème 91 de [19] montre que l'application

$$m_\Delta : \mathcal{H}^{-\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^\varepsilon_\Delta) \longrightarrow \mathcal{H}^{-\infty}_T(C^\varepsilon_\Delta)$$

définit par $m_\Delta(\alpha)(X) = (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta}\alpha(X_1) \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta)\Pi_k\sigma_k/\,\mathrm{vol}(T/T_\Delta)$, est un *isomorphisme*, et on voit que pour tout $\eta \in \mathcal{H}^\infty_T(M)$

$$i^*_\Delta(\eta)\Lambda_\Delta = m_\Delta\Big(k_\Delta(\eta)\,\mathrm{Eul}^{-1}_{\beta_\Delta}(\mathcal{E}_\Delta)\Big).$$

En modifiant le diagramme (6.43) avec les isomorphismes m_Δ, on obtient le

Théorème 6.21 *Notons $\Lambda' = \oplus_\Delta m_\Delta^{-1} \circ \Lambda$ et $j = \oplus_\Delta i_* \circ m_\Delta$. Nous avons le diagramme commutatif suivant qui précise (6.43):*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_T^\infty(M) \arrow[r, "\Lambda'"] \arrow[dr, "I"'] & \oplus_\Delta \mathcal{H}_{T_\Delta}^{-\infty}(\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon) \arrow[d, "j"] \\
& \mathcal{H}_T^{-\infty}(M),
\end{tikzcd} \tag{6.51}$$

avec $\Lambda'(\eta) = \oplus_\Delta k_\Delta(\eta) \operatorname{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)$ pour tout $\eta \in \mathcal{H}_T^\infty(M)$.

La variété M est orientée par sa forme symplectique. L'intégration sur M des formes équivariantes définit un morphisme $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M) \to \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$. En utilisant la formule d'intégration (6.45) on obtient finalement l'expression suivante de $\int_M \eta$.

Théorème 6.22 *Soient $\varepsilon \in W$ et $\eta \in \mathcal{A}_T^\infty(M)$ une forme fermée. Nous avons dans $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$ l'égalité*

$$\int_M \eta = \sum_{\Delta \in \mathcal{B}} I_\Delta^\varepsilon(\eta),$$

où $I_\Delta^\varepsilon(\eta)$ est la fonction généralisée de support $\mathfrak{t}_\Delta$ définie par

$$I_\Delta^\varepsilon(\eta)(X_1 + X_2) = (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta} \int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon} \frac{1}{|S^\Delta|} k_\Delta(\eta)(X_1) \operatorname{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)(X_1) \diamond \delta(X_2 - \omega_\Delta) \ .$$

Dans cette formule les variables X_1 et X_2 sont dans $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_\Delta$.

Pour toute forme $\eta \in \mathcal{H}_T^\infty(M)$ à décroissance rapide sur $\mathfrak{t}$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{M \times \mathfrak{t}} \eta(X) dX = & \sum_{\Delta \in \mathcal{B}} (2\pi\mathrm{i})^{dim\Delta} \times \\ & \left(\int_{\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon \times \mathfrak{t}_\Delta} \frac{1}{|S^\Delta|} k_\Delta(\eta)(X_1) \operatorname{Eul}_{\beta_\Delta}^{-1}(\mathcal{E}_\Delta)(X_1) dX_1 \right) \operatorname{vol}(T/T_\Delta, dX_2).\end{aligned}$$

Exemple 1 Si $\Delta = \{p\}$ est un sommet du polytope $\mu(M)$, alors $C_\Delta^\varepsilon = F = \mu^{-1}(p)$ est une composante connexe de M^T. Nous avons

$$X \in \mathfrak{t}, \qquad I_{\{p\}}^\varepsilon(\eta)(X) = \int_F i_F^*(\eta)(X) \operatorname{Eul}_{\beta_p}^{-1}(N_F)(X) \ ,$$

où N_F est le fibré normal de F dans M et $\beta_p = j^{-1}(p - \varepsilon)$.

Exemple 2 Si $\Delta = \mathfrak{t}^*$, alors $C_\Delta^\varepsilon = \mu^{-1}(\varepsilon)$ et $\mathcal{M}_\Delta^\varepsilon$ correspond à la variété réduite $\mathcal{M}_\varepsilon := \mu^{-1}(\varepsilon)/T$. D'après le Théorème 6.3 elle est connexe; ainsi $|S^\varepsilon|$ désigne un entier non nul. Nous avons

$$X \in \mathfrak{t}, \qquad I_{\mathfrak{t}^*}^\varepsilon(\eta)(X) = \frac{(2\pi\mathrm{i})^{dimT}}{|S^\varepsilon|} \int_{\mathcal{M}_\varepsilon} k_\varepsilon(\eta) \delta(X - \omega_\varepsilon) \ ,$$

où $k_\varepsilon : \mathcal{H}_T^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ correspond à l'application de Kirwan.

References

[1] M. F. ATIYAH, Convexity and commuting Hamiltonians, *Bull. London. Math. Soc.*, **14**, 1981, p. 1-15.

[2] M. F. ATIYAH et R. BOTT, The moment map and equivariant cohomology, *Topology*, **23**, 1984, 1-28.

[3] N. BERLINE, E. GETZLER et M. VERGNE, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren, vol. 298, Springer, Berlin, 1991.

[4] N. BERLINE et M. VERGNE, Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **295**, 1982, p. 539-541.

[5] N. BERLINE et M. VERGNE, Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes, *Duke. Math. J.*, **50**, 1983, p. 539-549.

[6] J.-M. BISMUT, Localizations formulas, superconnections, and the index theorem for families, *Comm. Math. Phys.*, **103**, 1983, p. 127-166.

[7] A. BRUGUIERES, Propriétés de convexité de l'application moment d'après Atiyah, Guillemin-Sternberg et Kirwan, *Sem. Bourbaki*, **654**, 1985.

[8] A. CANAS DA SILVA et GUILLEMIN, On the Kostant multiplicity formula for group actions with non-isolated fixed points, *Adv. Math.*, **123**, 1996, p. 1-15.

[9] J. J. DUISTERMAAT, Equivariant cohomology and stationary phase, Utrecht preprint no. 817, 1993.

[10] J. J. DUISTERMAAT et G. J. HECKMAN, On the variation in the cohomology in the symplectic form of the reduced phase space, *Invent. Math.*, **69**, 1982, p. 259-268; addendum, *ibid.*, **72**, 1983, p. 153-158.

[11] M. DUFLO et M. VERGNE, Orbites coadjointes et cohomologie équivariante, *The orbit method in representation theory. Birkhäuser, Progress in math.*, **82**, 1990, p. 11-60.

[12] M. DUFLO et M. VERGNE, Cohomologie équivariante et descente, *Astérisque*, **215**, 1993, p. 5-108.

[13] V. GUILLEMIN, E. LERMAN et S. STERNBERG, On the Kostant multiplicity formula, *J. Geom. Phys.*, **5**, 1988, p. 721-750.

[14] V. GUILLEMIN et E. PRATO, Heckman, Kostant and Steinberg formulas for symplectic manifolds, *Adv. Math.*, **82**, 1990, p. 160-179.

[15] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, Convexity properties of the moment map, *Invent. Math.*, **67**, 1982, p. 491-513.

[16] L. Jeffrey et F. Kirwan, Localization for non Abelian group action, *Topology*, **34**, p. 291-327, 1995, p. 291-327.

[17] T. Kawasaki, The signature theorem for V-manifold, *Topology*, **17**, 1978, p. 75-83.

[18] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.

[19] S. Kumar et M. Vergne, Equivariant cohomology with generalized coefficients, *Astérisque*, 215, 1993, p. 109-204.

[20] V. Mathai et D. Quillen, Superconnexions, Thom classes, and equivariant differential forms, *Topology*, **25**, 1986, p. 85-110.

[21] P-E. Paradan, Formule de localisation en cohomologie équivariante, Thèse, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1996.

[22] I. Satake, On a generalization of the notion of manifold, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*, **42**, 1956, p. 359-363; the Gauss-Bonnet theorem for V-manifold, *J. Math. Soc. Japan*, **9**, 1957, p. 464-492.

[23] M. Vergne, A note on the Jeffrey-Kirwan-Witten localization formula, *Topology*, **34**, 1996, p. 243-266.

[24] A. Weinstein, Symplectic V-manifold, periodic orbits of Hamiltonian systems, and the volume of certains Riemannian manifold, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **30**, 1977, p. 265-271.

[25] E. Witten, Two dimensional gauge theories revisited, *J. Geom. Phys.* **9**, 1992, p. 303-368.