Caractéristique d'Euler Equivariante En Homologie Cyclique Périodique

A. Bella Baci[1]

Department of Mathematics, University of Utrecht
P.O. Box 80.010, 3508 TA Utrecht
The Netherlands
e-mail: bellabac@math.ruu.nl

Abstract

We explain in cyclic homology setting, some results of Atiyah and Segal on orbifold Euler characteristic. For this, we give a new and direct proof for the Chern isomorphism between equivariant k-theory and periodic cyclic homology of crossed product by a finite group.

1 Introduction

Dans ce papier on présente une nouvelle démonstration de l'isomorphisme fourni par le caractère de Chern de Connes-Karoubi entre la K-théorie équivariante de Atiyah-Segal, notée $K_G^*(X)$, pour X une variété compacte muni d'une action d'un groupe fini G, et l'homologie cyclique périodique de l'algèbre produit croisé $C^\infty(X) \rtimes G$, notée $PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G)$.

$$(*) \qquad Ch_{\mathbb{C}} : K_G^j(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq PHC_j(C^\infty(X) \rtimes G); \quad j = 0, 1$$

Cette nouvelle approche basée sur l'homologie cyclique tordue, permet d'établir directement dans le cadre de l'homologie cyclique le résultat de Atiyah-Segal [AS1] sur la caractéristique d'Euler équivariante $\chi(X, G)$ de l'orbifold X/G.

$$(**) \quad \chi(X, G) = dimPHC_{pair}(C^\infty(X) \rtimes G) - dimPHC_{imp}(C^\infty(X) \rtimes G)$$

[1]-Recherche partiellement financée par l'Organisation Scientifique Néerlandaise (NWO).

Nous rappelons dans la section 2, la définition de l'homologie cyclique tordue de Feigin-Tsygan [FT] (liée au cadre équivariant de la géométrie non-commutative), ainsi que des résultats que nous avons établi dans [B] sur le calcul de l'homologie cyclique périodique de l'algèbre produit croisé. La section 3 est consacrée à des rappels sur la K-théorie équivariante ainsi que la démonstration de l'isomorphisme $(*)$ et la formule $(**)$.

Je remercie I. Moerdijk pour l'aide et l'intérêt qu'il a apporté a ce travail.

2 Homologie cyclique, complexes mixtes et produits croisés.

Rappelons quelques constructions liées à la notion d'objets cycliques tordus introduite par Feigin-Tsygan, [FT], qui généralise la notion d'objets cycliques de Connes, [C]. Soit k un anneau fixé, pour r un entier $1 \leq r \leq \infty$ un r-module cyclique $(X_n, d_i, s_i, t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un module simplicial avec des morphismes faces $d_i : X_{n+1} \to X_n$, et des morphismes dégénérescences $s_i : X_{n-1} \to X_n$, $0 \leq i \leq n$. De plus on a un morphisme $t : X_n \to X_n$ pour chaque n tel que $t^{r(n+1)} = 1$, satisfaisant aux identités suivantes:

$$d_i t_n = \begin{cases} t_{n-1} d_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ d_n & i = 0 \end{cases}$$

$$s_i t_n = \begin{cases} t_{n+1} s_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ t_{n+1}^2 s_n & i = 0 \end{cases}$$

Un complexe mixte (M, b, B), est la donnée d'un k-module M gradué positivement, d'une différentielle b sur M de degré -1, et d'une différentielle B sur M de degré $+1$ tel que $bB + Bb = 0$.

On note $k[u]$ l'anneau des polynômes, où u est de degré -2, W un $k[u]$-module gradué et $M[[u]]$ le module gradué des séries formelles en u, à coefficients dans un complexe mixte M, muni de la différentielle $b + uB$. Le complexe $M[[u]] \otimes_{k[u]} W$ est alors muni de la différentielle $(b + uB) \otimes 1$. L'homologie cyclique de M à coefficients dans W est, par définition :

$$HC_*(M, W) = H_*(M[[u]] \otimes_{k[u]} W).$$

Suivant [BG] on définit les différentes homologies cycliques d'un complexe mixte par

$$
\begin{aligned}
HC_*(M,k[u,u^{-1}]) &= PHC_*(M), \text{ homologie cyclique périodique}\\
HC_*(M,k[u,u^{-1}]/uk[u]) &= HC_*(M), \text{ homologie cyclique}\\
HC_*(M,k[u]/uk[u]) &= HH_*(M), \text{ homologie de Hochschild}
\end{aligned}
$$

Exemple 2.0.1 *Soient A une k-algèbre, et $\alpha \in Aut(A)$ tel que $\alpha^r = 1$, on obtient un r-module cyclique noté $A^\natural_{\alpha,r}$ en posant: $A^\natural_{\alpha,r}(n) = A^{\otimes(n+1)}$, et*

$$
\begin{aligned}
d_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i.a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \le i \le n-1\\
d_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (\alpha(a_n).a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1})\\
s_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \le i \le n\\
t_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (\alpha(a_n) \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1})
\end{aligned}
$$

Le r-module cyclique $A^\natural_{\alpha,r}$ définit un complexe mixte tordu noté $C_*(A,\alpha,r)$ avec:

$$
b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i \quad ; \quad B = (1-T)s\Big(\sum_{i=0}^{r(n+1)-1} T^i\Big), \quad T = (-1)^n t_n
$$

De la même manière que dans le cas classique de l'homologie cyclique [L], (ie $r = 1, \alpha = 1$), on associe des théories d'homologie cyclique tordue définies par:

1) $r < \infty$ $\qquad HC_*(A,\alpha,r;W) = H_*(C_*(A,\alpha,r)[[u]] \otimes_{k[u]} W)$

et une longue suite exacte de Connes:

$$
\ldots \to HH_*(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{I}} HC_*(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{S}} HC_{*-2}(A,\alpha,r) \xrightarrow{\mathrm{B}} HH_{*-1}(A,\alpha,r) \to \ldots
$$

ainsi qu'une suite spectrale fondamentale

$$
E^1_{**} = HH_*(A,\alpha,r) \overset{\text{Converge}}{\Longrightarrow} HC_*(A,\alpha,r) \tag{1}
$$

2) $r = \infty$ $\qquad HC_*(A,\alpha,\infty) \simeq HH_*(A,\alpha,\infty) \quad ; \quad PHC_*(A,\alpha,\infty) \simeq 0$

2.1 Produit croisé

Soit G un groupe discret qui opère sur A par automorphismes

$$G \xrightarrow{\alpha} Aut(A) \quad ; \quad g \longrightarrow \alpha_g$$

On note $A \rtimes G$ le produit croisé algébrique de A par G. Le k-module sous-jacent est le produit tensoriel $A \otimes k(G)$, les éléments sont les sommes finies $\sum a_g u_g$, muni du produit associatif et unitaire donné par:

$$(a_g u_g)(b_h u_h) = a\alpha_g(b)u_{gh}, \quad a, b \in A, \quad g, h \in G.$$

Exemple 2.1.1

1. *Dans le cas particulier $A = k$, on obtient l'algèbre du groupe $k(G)$.*
2. *On considère l'algèbre $C^\infty(X) \rtimes G = C^\infty(X \times G)$ ou les éléments sont les sommes formelles $\sum_{g \in G} f_g[g]$ où $f_g \in C^\infty(X)$, ($C^\infty(X)$ désigne les fonctions C^∞ sur X à valeurs complexes) et $g \in G$. L'addition et la multiplication dans $C^\infty(X \times G)$ sont :*

$$\Big(\sum_{g \in G} f_g[g]\Big) + \Big(\sum_{g \in G} h_g[g]\Big) = \Big(\sum_{g \in G}(f_g + h_g)[g]\Big)$$

$$\Big(f_g[g]\Big)\Big(h_\alpha[\alpha]\Big) = f_g.h^g_\alpha[g\alpha], \quad g, \alpha \in G$$

Pour $g \in G$, soient $G^g = \{h \in G \mid gh = hg\}$ le centralisateur de g dans G, (g) le sous groupe engendré par g dans G^g. Notons par $< G >$ l'ensemble des classes de conjugaisons de G et $[g] = \{hgh^{-1}/h \in G\}$ la classe de conjugaison de g dans G. Notons par $\langle G \rangle_{fin}$ (resp, $\langle G \rangle_\infty$) les classes de conjugaisons des éléments d'ordre fini (resp, infini). Le module cyclique $(A \rtimes G)^\natural$ se décompose en une somme directe

$$(A \rtimes G)^\natural = \bigoplus_{[g] \in <G>} (A \rtimes G)^\natural_{[g]} \tag{2}$$

Notons par $HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$ l'homologie cyclique du sous module cyclique $(A \rtimes G)^\natural_{[g]}$, engendré par les éléments : $(a_0 \otimes g_0) \otimes (a_1 \otimes g_1) \otimes ... \otimes (a_n \otimes g_n)$ avec $g_0.g_1...g_n \in [g]$. Par définition on a:

Théorème 2.1.1

$$HC_*(A \rtimes G; W) = \bigoplus_{[g] \in <G>} HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$$

Pour chaque classe de conjugaison $[g]$, on a un ord(g)-module cyclique noté $A^\natural_{\alpha_g, ord(g)}$. C'est un G^g-module pour l'opération

$$h.(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (\alpha_h(a_0) \otimes \alpha_h(a_1) \otimes \cdots \otimes \alpha_h(a_n)) \qquad h \in G^g, \quad a_i \in A$$

Cette opération induit une structure de G^g-module sur $HC_*(A, \alpha_g, ord(g); W)$. Dans [B] nous avons prouvé le théorème suivant:

Théorème 2.1.2 *Pour G discret de dimension homologique finie, il existe une suite spectrale:*

$$E^2_{**} = \bigoplus_{g \in \langle G \rangle_{fini}} H_*\Big(G^g, PHC_*(A, \alpha_g, ord(g))\Big) \quad \overset{\text{Converge}}{\Longrightarrow} \quad PHC_*(A \rtimes G) \qquad .$$

Démonstration

De la décomposition (2), il est facile de voir [B], que nous avons un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{c} \displaystyle\bigoplus_{g \in \langle G \rangle_{fini}} B_*(G^g) \otimes_{G^g} \Big(C_*(A, \alpha_g, ord(g))[[u]] \otimes_{\mathbb{C}[u]} \mathbb{C}[u, u^{-1}]\Big) \\ \wr \big\downarrow \\ C_*(A \rtimes G)[[u]] \otimes_{\mathbb{C}[u]} \mathbb{C}[u, u^{-1}] \end{array}$$

$B_*(G^g)$ désigne la bar résolution réduite du groupe G^g. La suite spectrale du théorème, est associée à la filtration

$$\Im^p = \sum_{0 \le j \le p} \left(\bigoplus_{g \in \langle G \rangle_{fini}} \Big(B_j(G^g) \hat{\otimes}_{G^g} (C_*(A, \alpha_g, ord(g))[[u]] \otimes_{\mathbb{C}[u]} \mathbb{C}[u, u^{-1}])\Big) \right)$$

(où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété algébrique) $\diamond$

Pour $A = C^\infty(X)$ et G discret, le formalisme algébrique précédent se prolonge sans difficulté au cadre topologique avec le produit tensoriel projectif suivant [C]. Dans ce cadre, l'homologie cyclique tordue décrit l'homologie des points fixes. Pour illustrer ceci notons par

$$X^g = \{x \in X \quad / g.x = x \quad ; \quad ord(g) < \infty\}$$

la sous-variété des points fixés par le sous groupe engendré par $g \in G$. Le théorème suivant est la version délocalisée (dans le sens équivariant) du théorème classique d'Alain Connes [C, Thm 2 page 208]

Théorème 2.1.3 *Pour $g \in G$ d'ordre fini, alors*

$$\begin{aligned} PHC_j(C^\infty(X), \alpha(g), ord(g)) &\simeq PHC_j(C^\infty(X^g)) \qquad j = 0,1 \\ &\simeq \prod_{l \geq 0} H_{dR}^{2l+j}(X^g) \qquad j = 0,1 \end{aligned}$$

Démonstration

Le deuxième isomorphisme est le théorème de Connes [7, Th2 page 208] pour la sous variété X^g (car g est d'ordre fini). Le premier isomorphisme est une conséquence du fait que nous avons un quasi-isomorphisme au niveau de l'homologie de Hochschild

$$\begin{aligned} HH_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) &\simeq HH_*(C^\infty(X^g), C^\infty(X^g)) \\ &\simeq \Omega^*(X^g) \end{aligned}$$

où $\Omega^*(X^g)$ désigne l'algèbre différentiel gradué des formes différentielles sur X^g. Le quasi-isomorphisme est fourni par le morphisme de complexes mixtes

$$C_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) \rightarrow C_*(C^\infty(X^g)), \alpha_e, 1)$$

induit par le morphisme de restriction $C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X^g)$. Le quasi-isomorphisme précédent induit un isomorphisme entre les suites spectrales fondamentales associées, d'où le théorème. Notons qu'il est possible d'obtenir directement l'isomorphisme

$$HH_*(C^\infty(X), \alpha_g, ord(g)) \simeq \Omega^*(X^g)$$

par la méthode de [C], voir [Br].$\diamond$

Pour les groupes finis on a une décomposition de l'homologie cyclique périodique de l'algèbre produit croisé, qu'on décrit dans

Proposition 2.1.1 *Pour un groupe fini G, on a*

$$\begin{aligned} PHC_{pair}((C^\infty(X) \rtimes G) &\simeq \bigoplus_{[g]} \Big(\prod_{j \geq 0} H^{2j}(X^g, \mathbb{C}\Big)^{G^g} \\ PHC_{imp}((C^\infty(X) \rtimes G) &\simeq \bigoplus_{[g]} \Big(\prod_{j \geq 0} H^{2j+1}(X^g, \mathbb{C}\Big)^{G^g} \end{aligned}$$

$\Big(,\Big)^{G^g}$ *désigne la partie G^g-invariante.*

Démonstration

Ceci est une conséquence immédiate de la dégénèressence de la suite spectrale du théorème (2.1.2), ainsi que le théorème (2.1.3).$\diamond$

3 K-théorie équivariante et caractère de Chern

Soit X une variété compacte, et G un groupe fini qui opére sur X. Dans ce contexte, la K-théorie équivariante $K_G^j(X)$, où $K_G^0(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les G-fibrés vectoriels sur X. Pour $j > 0$, on pose $K_G^j(X) = K_G^0(X \times \mathbb{R}^j)$. Puisque le théorème de périodicité de Bott se prolonge au cadre équivariant nous pouvons prolonger $K_G^0(X)$ à une théorie cohomologique $\mathbb{Z}_2$-graduée $K_G^*(X) = K_G^0(X) \oplus K_G^1(X)$. Chaque groupe $K_G^j(X)$ est un $R(G)$-module où $R(G) = K_G^0(pt)$ est l'anneau des représentations du groupe G. Notons enfin que pour un espace homogène G/H, (où $H \subset G$ un sous groupe de G) on a $K_G^0(G/H) = R(H)$. Il existe un caractère de Chern

$$ch : K_G^0(X) \to \prod_i H_G^{2i}(X)$$

$$ch : K_G^1(X) \to \prod_i H_G^{2i+1}(X)$$

où $H_G^*(X) = H^*(EG \times_G X)$ désigne la cohomologie équivariante de Borel.

Le morphisme $ch : K_G^0(X) \to \prod_i H_G^{2i}(X)$ n'est pas injectif, en effet pour G un groupe fini et X un point, $ch : R(G) \to \mathbb{Q}$ n'est pas injectif. Notons par I l'idéal maximal des représentations de dimension 0. Si on regarde $R(G)$ comme anneau de fonctions sur G, l'idéal I correspond à l'origine du groupe, et $H_G^*(X)$ est la localisation du $R(G)$-module $K_G^0(X)$ a l'élément 1 de G. C'est dans ce sens que la cohomologie équivariante de Borel est localisé à l'origine du groupe. C'est aussi pour cette raison que l'homologie cyclique périodique est le cadre le mieux adapté à la K-théorie équivariante pour les groupes finis. Rappelons que pour une algèbre A localement convexe, A. Connes [C] et M. Karoubi [Ka], ont construit un caractère de Chern noté

$$Ch : K_*(A) \longrightarrow PHC_*(A)$$

où $K_*(A)$ désigne la K-théorie topologique [BL]. Pour $A = C^\infty(X) \rtimes G$, cette K-théorie est liée à la K-théorie équivariante de Segal, via un théorème de Swan-Serre équivariant c'est à dire l'équivalence entre la catégorie des G-fibrés vectoriels sur X, et la catégorie des modules projectifs de types finis sur $C^\infty(X) \rtimes G$.

Théorème 3.0.4 [J]. *Pour un groupe fini G, on a l'isomorphisme*

$$K_G^*(X) \simeq K_*(C^\infty(X) \rtimes G)$$

Notons que pour un groupe fini, le produit croisé réduit considéré dans [J] coincide avec le produit croisé algébrique. Via ce théorème, le caractère de Chern de Connes-Karoubi prend la forme suivante

$$Ch : K_G^*(X) \longrightarrow PHC_*((C^\infty(X) \rtimes G)$$

C'est un $R(G)$-morphisme compatible avec la décomposition de l'homologie cyclique périodique établi dans la proposition (2.1.1), ainsi qu'avec la décomposition suivante de la K-théorie équivariante. En effet, notons par $K^*(X)$ la K-théorie topologique de Atiyah-Hirzebruch alors:

Théorème 3.0.5 [AS1]. *Soit G un groupe fini, alors*

$$K_G^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{[g]} \Big(K^*(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \Big)^{G^g}$$

où $\Big(, \Big)^{G^g}$ désigne la partie G^g-invariante.

Pour chaque $g \in G$, l'isomorphisme de Chern ordinaire

$$Ch_{\mathbb{C}} : K^0(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \prod_{j \geq 0} H^{2j}(X^g, \mathbb{C})$$

$$Ch_{\mathbb{C}} : K^1(X^g) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \prod_{j \geq 0} H^{2j+1}(X^g, \mathbb{C}),$$

entre les composantes à droites dans le théorème (3.0.5) et la proposition (2.1.1), donne le théorème suivant.

Théorème 3.0.6 *Pour un groupe fini G, on a l'isomorphisme*

$$Ch_{\mathbb{C}} : K_G^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq PHC_*(C^\infty(X) \rtimes G) \quad ; \quad * = 0, 1$$

Du théorème précédent (sinon directement via la proposition (2.1.1)) on déduit (en homologie cyclique périodique), le résultat suivant établi par Atiyah-Segal en K-théorie équivariante, [AS1].

Théorème 3.0.7 *Soit $\chi(X, G)$ la caractéristique d'Euler de l'orbifold X/G. Alors*

$$\chi(X, G) = dimPHC_{pair}(C^\infty(X) \rtimes G) - dimPHC_{imp}(C^\infty(X) \rtimes G)$$

References

[AS1] **M. F. Atiyah- G. Segal.** On equivariant Euler characteristics, J. Geo. Ph Vol 6, n4 (1989)

[AS2] **M. F. Atiyah- G. Segal.** Equivariant K-theory and completion J. Diff. Geom n3 (1969), 1-80

[B] **A. Bella Baci.** Homologie cyclique du produit croisé algébrique et groups de surfaces A paraitre Journal of Pure and Applied Algebra (1997).

[BL] **B. Blackadar.** $K-$theory for operator algebras, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1986.

[BG] **J. Block - E. Getzler.** Equivariant cyclic homology and equivariant differential forms, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. série 4, t. 27, p. 493-527, (1994).

[Br] **J. L. Brylinski** Cyclic homology and equivariant theories, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 37, 4 pp/15-28 (1987)

[C] **A. Connes.** Non commutative geometry. Academic Press 1995

[FT] **B.L. Feigin-B.L. Tsygan.** Additive K-theory, L.N.M 1289 (1987).

[Ka] **M. Karoubi.** Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque 149 (1987)

[L] **J.L. Loday.** Cyclic Homology, Grand.Math.Xiss., Springer Verlag 1993.

[J] **P. Julg.** K-théorie équivariante et produits croisés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, Série I, pp: 629-632, (1981).

[S] **G. Segal.** Equivariant K-theory, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris n.34 pp:129-151(1968).