A paraitre

Journal of Pure and Applied Algebra

1997

HOMOLOGIE CYCLIQUE DU PRODUIT CROISE ALGEBRIQUE ET GROUPES DE SURFACES

Abderrazak BELLA BACI*

Department of Mathematics, University of Utrecht
P.O. Box 80.010, 3508 TA Utrecht,
The Netherlands
e-mail: bellabac@math.ruu.nl

Abstract

Let a group G act on an associative algebra A. One can form the algebraic crossed product $A \rtimes G$ (*cf* 1.3), which plays the role of a "noncommutative quotient" in Connes's theory [6]. The cyclic homology of this algebra was studied extensively in a series of papers [4] [8] [10] [16] [17]. It is well known that this homology admits a decomposition into a direct sum (*cf* 1.4) where the summands are indexed by conjugacy classes of elements of the group. Every direct summand is a limit of a spectral sequence whose E^2 term is the homology of the group with coefficients in certain homology groups (*cf* 1.5). These latter homology groups are the cyclic homology groups of the algebra if the conjugacy class is the identity element.

In this paper we studie this spectral sequence, and the generalized version to negative and periodique cyclic homology. The main result (*cf* 2.6) is the description of the differential in the E^2 term. More generally we define characteristic classes for the action of an algebra on a mixed complex. When the mixed complex is the naturel one associated to a G-algebra A, and the operation is that of an automorphism group G of A, these classes

* -Research supported by the Dutch Science Organisation (NWO).

Mots clés: Homologie cyclique, Produit croisé, Suite spectrale, Classes caractéristiques.

determine the differential d_2 of this spectral sequence. We apply this result to obtain a description of the periodic cyclic homology of a crossed product by the fundamental group of a Riemann surface (cf 3.1).

Introduction

Burghelea, [3], et Karoubi, [11], ont calculé la cohomologie cyclique de l'algèbre du groupe $k(G)$, où G est un groupe discret. Feigin-Tsygan, [8], prolongent ces résultats et montrent que l'homologie cyclique $HC_*(A \rtimes G)$ du produit croisé $A \rtimes G$ d'une G-algèbre A, se décompose en somme directe (1.4), où chaque composante est limite d'une suite spectrale (th 1.5), voir aussi la suite spectrale de Brylinski [4] en homologie de Hochschild. La suite spectrale de Feigin-Tsygan est généralisée aux diverses variantes de l'homologie cyclique par Getzler et Jones [10].

Si G est un groupe libre de système de générateurs $(g_i)_{i\in I}$, la suite spectrale est concentrée sur deux colonnes et dégénère en une suite exacte qui donne les résultats de Nistor [16] et de Nest [17] dans le cas du groupe $\mathbb{Z}$. L'objectif de ce papier est l'étude de cette suite spectrale dans le cas où le groupe admet des relations, ce qui permettra de prolonger les résultats de Nest et Nistor à d'autres classes de groupes.

Notre approche est basée sur la théorie des classes caractéristiques secondes introduites par A. Legrand pour déterminer la différentielle de la suite spectrale de Serre d'une fibration. On montre que pour chaque classe $[g]$ de conjugaisons de G, la différentielle $d_2 : H_p(G^g, HC_q(A, \alpha_g, ord(g); W)) \to H_{p-2}(G^g, HC_{q+1}(A, \alpha_g, ord(g); W))$ de la suite spectrale de Feigin-Tsygan associée, est un produit de Yoneda par une classe

$$\Theta_q(g, A, W) \in Ext^2_{G^g}(HC_q(A, \alpha_g, ord(g); W), HC_{q+1}(A, \alpha_g, ord(g); W))$$

où $HC_*(A, \alpha_g, ord(g); W)$ est une des homologies (d'Hochschild, cyclique, cyclique négative et cyclique périodique) associées à l'algèbre A (voir 1), et G^g est le centralisateur de g dans G . Cette classe, qui peut être non nulle même si $HC_*(A, \alpha_g, ord(g); W)$ est un G^g-module trivial, est caractéristique de l'opération de G sur A. Sur un corps

$$\Theta_q(g, A, W) \in H^2(G^g, Hom(HC_q(A, \alpha_g, ord(g); W), HC_{q+1}(A, \alpha_g, ord(g); W)))$$

est donc associé aux relations du groupe. Notons par exemple, que l'opérateur de Connes $S : HC_*(\mathbb{C}(G)) \to HC_{*-2}(\mathbb{C}(G))$, est entièrement déterminé par ces classes. Des classes de même type ont été introduites en K-théorie par E. Fieux, [9], pour calculer la différentielle de la suite spectrale de Kasparov.

La construction de ces classes caractéristiques est faite dans le paragraphe 2 dans le cas général de l'opération d'une algèbre sur un complexe mixte. Dans le même paragraphe on montre que ces classes déterminent la différentielle d'une suite spectrale associée à cette opération. Ces résultats, appliqués à l'algèbre produit croisé, permettent de calculer la différentielle de la suite spectrale de Feigin-Tsygan. Dans le paragraphe 3 , on en déduit des suites exactes donnant l'homologie cyclique du produit croisé par un groupe de surface. Le paragraphe 1 est consacré à des rappels sur l'homologie cyclique et sur l'algèbre produit croisé, ainsi que le prolongement de la suite spectrale de Feigin-Tsygan aux diverses variantes de l'homologie cyclique tordue.

Je remercie A. Legrand pour l'aide et le soutien qu'il a apporté à l'élaboration de cet article, ainsi que B.L. Tsygan pour les discussions que j'ai eu avec lui sur le sujet. Je remercie I. Moerdijk pour l'aide et l'intérêt qu'il a apporté a ce travail.

1. Homologie cyclique, complexes mixtes et produits croisés.

1.1 Rappelons quelques constructions liées à la notion d'objets cycliques tordus introduite par Feigin-Tsygan, [8], qui généralise la notion d'objets cycliques de Connes, [7]. Soit k un anneau fixé, pour r un entier $1 \leq r \leq \infty$ un r-module cyclique $(X_n, d_i, s_i, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un module simplicial avec des morphismes faces $d_i : X_{n+1} \to X_n$, et des morphismes dégénérescences $s_i : X_{n-1} \to X_n$, $0 \leq i \leq n$. De plus on a un morphisme $t : X_n \to X_n$ pour chaque n tel que $t^{r(n+1)} = 1$, satisfaisant aux identités suivantes:

$$d_i t_n = \begin{cases} t_{n-1} d_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ d_n & i = 0 \end{cases}$$

$$s_i t_n = \begin{cases} t_{n+1} s_{i-1} & 1 \leq i \leq n \\ t_{n+1}^2 s_n & i = 0 \end{cases}$$

Un complexe mixte (M, b, B), [12], est la donnée d'un k-module M gradué positivement, d'une différentielle b sur M de degré -1, et d'une différentielle B sur M de degré $+1$ tel que $bB + Bb = 0$.

On note $k[u]$ l'anneau des polynômes, où u est de degré -2, W un $k[u]$-module gradué et $M[[u]]$ le module gradué des séries formelles en u, à coefficients dans un complexe mixte M, muni de la différentielle $b + uB$. Le complexe $M[[u]] \otimes_{k[u]} W$ est alors muni de la différentielle $(b + uB) \otimes 1$. L'homologie cyclique de M à coefficients dans W est, par définition :

$$HC_*(M, W) = H_*(M[[u]] \otimes_{k[u]} W).$$

Suivant [10] on définit les différentes homologies cycliques d'un complexe mixte par :

$$\begin{aligned}
HC_*(M, k[u]) &= HC_*^-(M), \text{ homologie cyclique négative} \\
HC_*(M, k[u, u^{-1}]) &= PHC_*(M), \text{ homologie cyclique périodique} \\
HC_*(M, k[u, u^{-1}]/uk[u]) &= HC_*(M), \text{ homologie cyclique} \\
HC_*(M, k[u]/uk[u]) &= HH_*(M), \text{ homologie de Hochschild}
\end{aligned}$$

1.2 Soient A une k-algèbre, et $\alpha \in Aut(A)$ tel que $\alpha^r = 1$, on obtient un r-module cyclique noté $A^\natural_{\alpha,r}$ en posant: $A^\natural_{\alpha,r}(n) = A^{\otimes(n+1)}$, et

$$\begin{aligned}
d_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i.a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \leq i \leq n-1 \\
d_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (\alpha(a_n).a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\
s_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \quad 0 \leq i \leq n \\
t_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (\alpha(a_n) \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1})
\end{aligned}$$

Le r-module cyclique $A^\natural_{\alpha,r}$ défini un complexe mixte tordu noté $C_*(A, \alpha, r)$ avec:

$$b = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i \quad ; \quad B = (1-T)s(\sum_{i=0}^{r(n+1)-1} T^i), \quad T = (-1)^n t_n$$

De la même manière que dans le cas classique de l'homologie cyclique (ie $r = 1, \alpha = 1$), on associe des théories d'homologie cyclique tordue définies par:

$$1) \quad r < \infty \qquad HC_*(A, \alpha, r; W) = H_*(C_*(A, \alpha, r)[[u]] \otimes_{k[u]} W)$$

et une suite exacte de Connes:

$$... \to HH_*(A, \alpha, r) \xrightarrow{\mathrm{I}} HC_*(A, \alpha, r) \xrightarrow{\mathrm{S}} HC_{*-2}(A, \alpha, r) \xrightarrow{\mathrm{B}} HH_{*-1}(A, \alpha, r) \to ...$$

$$2) \quad r = \infty \qquad HC_*(A, \alpha, \infty) \simeq HH_*(A, \alpha, \infty) \quad ; \quad PHC_*(A, \alpha, \infty) \simeq 0$$

1.3 Soit G un groupe discret qui opère sur A par automorphismes $g \to \alpha_g, G \xrightarrow{\alpha} Aut(A)$. On note $A \rtimes G$, le produit croisé algébrique de A par G. Le k-module sous-jacent est le produit tensoriel $A \otimes k(G)$, les éléments sont les sommes finies $\sum a_g u_g$, muni du produit associatif et unitaire donné par:

$$(a_g u_g)(b_h u_h) = a\alpha_g(b) u_{gh}, \quad a, b \in A, \quad g, h \in G.$$

Dans le cas particulier $A = k$, on obtient l'algèbre du groupe $k(G)$. Pour $g \in G$, soient $G^g = \{h \in G \mid gh = hg\}$ le centralisateur de g dans G, (g) le sous groupe engendré par g dans G^g et $N^g = G^g/(g)$ le normalisateur. Notons par $< G >$ l'ensemble des classes de conjugaisons de G et $[g] = \{hgh^{-1}/h \in G\}$ la classe de conjugaison de g dans G. Notons par $\langle G\rangle_{fin}$ (resp, $\langle G\rangle_\infty$) les classes de conjugaisons des éléments d'ordre fini (resp, infini). Le module cyclique $(A \rtimes G)^\natural$ ainsi que les groupes d'homologie se décomposent en une somme directe

$$(1.4) \qquad (A \rtimes G)^\natural = \bigoplus_{[g]\in<G>} (A \rtimes G)^\natural_{[g]} \quad ; \quad HC_*(A \rtimes G; W) = \bigoplus_{[g]\in<G>} HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$$

où $HC_*(A \rtimes G; W)_{[g]}$ est l'homologie cyclique de $(A \rtimes G)^\natural_{[g]}$, le sous module cyclique engendré par les éléments :

$$(a_0 \otimes g_0) \otimes (a_1 \otimes g_1) \otimes ... \otimes (a_n \otimes g_n)$$

avec $g_0.g_1...g_n \in [g]$.

Pour chaque classe de conjugaisons $[g]$, on a un ord(g)-module cyclique noté $A^\natural_{\alpha_g, ord(g)}$. C'est un G^g -module pour l'opération

$$h.(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (\alpha_h(a_0) \otimes \alpha_h(a_1) \otimes \cdots \otimes \alpha_h(a_n)) \qquad h \in G^g, \quad a_i \in A$$

Cette opération induit une structure de G^g-module sur $HC_*(A, \alpha_g, ord(g); W)$. Le théorème suivant prolonge la suite spectrale de Feigin-Tsygan dans les diverses variantes de l'homologie cyclique

1.5 Théorème

Pour chaque $g \in G$ d'ordre fini, il existe une suite spectrale qui part de

$$E^2_{p,q} = H_p(G^g, \ HC_q(A, \alpha_g, ord(g); W)$$

-Si $W = k[u]/uk[u]$ elle converge vers $HH_*(A \rtimes G)_{[g]}$.

-Si $W = k[u,u^{-1}]/uk[u]$ elle converge vers $HC_*(A \rtimes G)_{[g]}$.

- Si G^g est de dimension homologique finie, et $W = k[u,u^{-1}]$ (resp, $k[u]$) elle converge vers $PHC_*(A \rtimes G)_{[g]}$ (resp, $HC_*^-(A \rtimes G)_{[g]}$).

Dans [16] V. Nistor montre que pour g d'ordre infini, et N^g de dimension homologique fini l'opérateur S de Connes sur $HC_*(A \rtimes G)_{[g]}$ est nilpotent. d'où le résultat suivant de Nistor

1.5.1 Proposition

$$PHC_*(A \rtimes G) = \bigoplus_{[g]\in <G>_{fin}} PHC_*(A \rtimes G)_{[g]}$$

Suivant P. Baum-A. Connes [2], notons par $F(G) = \bigoplus_{[g]\in <G>_{fin}} k(G) \otimes_{k(G^g)} k$, et par:

$$H_{ev}(G,F(G)) = \bigoplus_j H_{2j}(G,F(G)) \quad ; \quad H_{odd}(G,F(G)) = \bigoplus_j H_{2j+1}(G,F(G))$$

1.6 Théorème [3]

Sur un corps k de caractéristique zéro, et pour un groupe de dimension homologique finie alors :

$$PHC_*(k(G)) \simeq \begin{cases} H_{ev}(G,F(G)) & * = pair \\ \\ H_{odd}(G,F(G)) & * = imp \end{cases}$$

Notons par t un générateur de $\mathbb{Z}$, l'algèbre produit croisé $A \rtimes \mathbb{Z}$ est exactement l'algèbre $A[t,t^{-1}]$ des polynomes de Laurent à coefficient dans A. Du théorème précédent en déduit le résultat classique suivant .

1.6.1 Corollaire

$$PHC_*(k[t,t^{-1}]) \simeq k \oplus k$$

Démonstration du théorème 1.6: Si g est d'ordre fini, la suite spectrale de Hochschild-Lyndon-Serre associée à l'extension: $0 \to (g) \to G^g \to N^g \to 0$ dégénére et donne l'isomorphisme $H_*(N^g,k) \simeq H_*(G^g,k)$. Si $A = k$, la suite spectrale du théorème (1.5) en homologie cyclique périodique dégénére et on obtient :

$$PHC_*(k(G))_{[g]} \simeq \begin{cases} \bigoplus_j \quad H_{2j}(G^g,k) & * = pair \\ \\ \bigoplus_j \quad H_{2j+1}(G^g,k) & * = imp \end{cases}$$

De la proposition (1.5.1) en déduit :

$$PHC_*(k(G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_{[g]\in <G>_{fin}} \quad \bigoplus_j \quad H_{2j}(G^g,k) & * = pair \\ \\ \bigoplus_{[g]\in <G>_{fin}} \quad \bigoplus_j \quad H_{2j+1}(G^g,k) & * = imp \end{cases}$$

du lemme Shapiro en déduit :

$$PHC_*(k(G) \simeq \begin{cases} \bigoplus_j \quad H_{2j}(G,F(G)) & * = pair \\ \\ \bigoplus_j \quad H_{2j+1}(G,F(G)) & * = imp \end{cases}$$

2. Classes caractéristiques secondes en homologie cyclique.

2.1 Soient Γ une k-algèbre, et (M,b,B) un complexe mixte. On dit que (M,b,B) est un Γ-complexe mixte si (M,b) est un Γ-module différentiel gradué, et B est un morphisme de Γ-modules. Pour une G-algèbre associative A, où G est un groupe discret, le complexe mixte $(C_*(A,1,1),b,B))$ est un $k(G)$-complexe mixte.

La structure de Γ-complexe mixte sur (M,b,B) induit une structure de Γ-module différentiel gradué sur le complexe $M[[u]] \otimes_{k[u]} W$. Considérons les suites exactes suivantes

$$e'_*(M) : 0 \to HC_{*+1}(M,W) \to Z'_{*+1} \to B_* \to 0$$

$$e_*(M) : 0 \to B_* \to Z_* \to HC_*(M,W) \to 0$$

où Z_*, B_*, Z'_* sont respectivement cycle, bord et conoyau de la différentielle $d = b + uB$. Ces extensions définissent des classes

$$[e'_*(M)] \in Ext^1_\Gamma(HC_{*+1}(M,W),\ B_*) \ \ ; \ \ [e_*(M)] \in Ext^1_\Gamma(B_*,\ HC_*(M,W))$$

Le produit $\cup$ de Yoneda, [18], des classes $[e'_*(M)]$, $[e_*(M)]$ définit une classe :

$$\Theta_*(M,W) = [e_*(M)] \cup [e'_*(M)] \in Ext^2_\Gamma(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))$$

2.2 Définition. *On appelle classe caractéristique seconde associée au complexe mixte (M,b,B) la classe $\Theta_*(M,W)$.*

Pour chaque entier q, la classe $\Theta_*(M,W)$ détermine une classe:

$$\Theta_q(M,W) \in Ext^2_\Gamma(HC_q(M,W), HC_{q+1}(M,W))$$

Plus généralement les groupes $Ext^n_\Gamma(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))$ associés à un Γ-complexe mixte (M,b,B) entrent dans une longue suite exacte, qu'on donne ici dans le cadre des homologies cycliques, comme cas particulier de celle traitée dans [5] .

2.3 Proposition. *Soit (M,b,B) un Γ-complexe mixte, où Γ est projective sur un anneau héréditaire. Alors on a la longue suite exacte fonctorielle :*

$$\begin{gathered}\to H^{n-2}(\Gamma, Ext(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))\\ \to H^n(\Gamma, Hom(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))) \to Ext^n_\Gamma(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))\\ \to H^{n-1}(\Gamma, Ext(HC_*(M,W), HC_{*+1}(M,W))) \to\end{gathered}$$

2.4 Suite spectrale d'un Γ-complexe mixte.

Soient J_*, N_* des Γ-modules gradués à gauche, et C_* un Γ-module gradué à droite, projectif en tant que Γ-module dont la gradution est bornée inférieurement. Le morphisme naturel

$$Hom^*_\Gamma(J_*, I_*) \otimes (C_* \otimes_\Gamma J_*) \to C_* \otimes_\Gamma I_*$$

(où I_* est une résolution Γ-injective de N_*) induit un produit

$$\cap : Ext^{*,*}_\Gamma(J_*, N_*) \otimes H_*(C_* \otimes_\Gamma J_*) \to H_*(C_* \otimes_\Gamma N_*)$$

Soit (M,b,B) un Γ-complexe mixte, notons par $\hat{\otimes}$ le produit tensoriel complètè algébrique, il est facile de voir que

$$C_* \hat{\otimes}_\Gamma M[[u]] \cong (C_* \otimes_\Gamma M)[[u]]$$

En effet les éléments de degré k du module de gauche sont des sommes finies de termes de la forme:

$$\prod_j \left(c_{k-j} \otimes \prod_l m_l^j u^l \right) = \prod_l \left(\sum_{-2l \leq j \leq k-\alpha} c_{k-j} \otimes m_l^j u^l \right)$$

avec $k - l \geq \alpha$ et $j + 2l \geq 0$ $m_l^j \in M_{j+2l}$. La filtration :

$$F^p = \sum_{0 \leq j \leq p} (C_j \hat{\otimes}_\Gamma ((M[[u]] \otimes_{k[u]} W))$$

donne naissance a une suite spectrale de premier terme

$$E^2_{p,q} = H_p(C_* \otimes_\Gamma HC_q(M, W))$$

En particulier dans le cas où C_* est la bar-construction réduite $B(\Gamma)$ de l'algèbre Γ [15], on obtient le résultat suivant :

2.5 Théorème. *Pour un Γ-complexe mixte (M, b, B), on a une suite spectrale*

$$E^2_{p,q} = H_p(\Gamma,\ HC_q(M, W)$$

Si Γ est de dimension homologique finie, elle converge vers $HC_{p+q}(B(\Gamma) \otimes_\Gamma M, W)$

Le théorème précédent donne en particulier, pour $\Gamma = k(G^g)$ et $M = C_*(A, \alpha_g, ord(g))$ les suites spectrales du théorème (1.5). Avec l'isomorphisme, [8],

$$B(G^g) \otimes_{G^g} C_*(A, \alpha_g, ord(g)) \simeq (A \rtimes G)^\natural_{[g]}$$

Montrons maintenant que les classes caractéristiques secondes déterminent la différentielle

$$d_2 : H_p(\Gamma, HC_q(M, W)) \to H_{p-2}(\Gamma, HC_{q+1}(M, W))$$

de la suite spectrale du théorème précédent.

2.6 Théorème.

$$d_2 = \Theta_q(M, W) \cap$$

où $\Theta_q(M, W)$ est la classe caractéristique seconde associée au Γ-complexe mixte (M, b, B).

Pour démontrer le théorème (2.6), nous allons introduire une autre définition de la classe caractéristique seconde associée à un Γ-complexe mixte (M, b, B). En effet, soit I^*_*

une résolution Γ-injective de $HC_*(M,W)$. Le premier terme de la suite spectrale associée à la filtration F^* de $Hom^*_\Gamma(M[[u]]\otimes_{k[u]} W, I^*_*)$ par le degré de la résolution est :

$$\underline{E}_2^{p,q} = Ext^p_\Gamma(HC_*(M,W),\ HC_{*-q}(M,W))$$

En particulier:

$$\underline{E}_2^{0,0} = Hom_\Gamma(HC_*(M,W),\ HC_*(M,W))$$

l'image de $1 \in \underline{E}_2^{00}$ par la différentielle ∂_2 de cette suite spectrale, est une classe

$$\Omega_*(M,W) = \partial_2[1] \in Ext^2_\Gamma(HC_*(M,W),\ HC_{*+1}(M,W)).$$

De la même manière que dans [13], on montre que la classe $\Omega_*(M,W)$ est l'opposée de la classe caractéristique seconde $\Theta_*(M,W)$.

Démonstration du théorème.

Soit $\underline{F}_*$ la filtration sur $B_*(\Gamma)\otimes_\Gamma I^*_*$ telle que:

$$\underline{F}_*(B_*(\Gamma)\otimes_\Gamma I^*_*) = \sum_{i-j=k} B_i(\Gamma)\otimes_\Gamma I^j_*$$

La suite spectrale de premier terme ${}^2\underline{E}_{*,*}$ associée à la filtration précédente dégénère, et la différentielle $\underline{d}_2$ est nulle. Soit σ le morphisme :

$$\sigma : Hom^*_\Gamma(M[[u]]\otimes_{k[u]} W, I^*_*)\otimes(B_*(\Gamma)\hat{\otimes}_\Gamma(M[[u]]\otimes_{k[u]} W)) \to B_*(\Gamma)\otimes_\Gamma I^*_*$$

défini par :

$$\sigma(f\otimes c\otimes m) = (-1)^{deg(c).deg(f)} c\otimes f(m)$$

où $f\in Hom^*_\Gamma(M[[u]]\otimes_{k[u]} W, I^*_*)$, $c\in B_*(\Gamma)$ et $m\in M[[u]]\otimes_{k[u]} W$.

Notons par F_* la filtration de $B_*(\Gamma)\hat{\otimes}_\Gamma(M[[u]]\otimes_{k[u]} W)$ par le degré de $B_*(\Gamma)$. Le morphisme σ induit un produit au niveau des suites spectrales :

$$\cap : \underline{E}_2^{s,t}\otimes E^2_{p,q} \to^2 \underline{E}^2_{p-s,q+t}$$

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{E}_2^{*,*}\otimes E^2_{*,*} & \longrightarrow & {}^2\underline{E}_{*,*} \\ \downarrow D_2 & & \downarrow \underline{d}_2 \\ \underline{E}_2^{*,*}\otimes E^2_{*,*} & \longrightarrow & {}^2\underline{E}_{*,*} \end{array}$$

est commutatif, avec $D_2 = \partial_2 \otimes 1 + 1 \otimes d_2$. Comme la différentielle de la suite spectrale ${}^2\underline{E}_{*,*}$ est nulle, alors pour x dans $H_p(\Gamma, HC_q(M,W))$, on a :

$$0 = \underline{d}_2(1 \cap x) = \partial_2[1] \cap x + 1 \cap d_2(x)$$

Le fait que la classe $\Omega_q(M,W)$ est l'opposée de la classe caractéristique seconde $\Theta_q(M,W)$, entraine alors le théorème.

Revenons maintenant au produit croisé, la structure de G^g module sur $A^\natural_{\alpha_g, ord(g)}$ induit une structure de $k(G^g)$-complexe mixte sur $C_*(A, \alpha_g, ord(g))$. Soit $\Theta_q(g,A,W) \in Ext^2_{G^g}(HC_q(A,\alpha_g,ord(g);W), HC_{q+1}(A,\alpha_g,ord(g);W))$ la classe caractéristique seconde associée. Notons par

$$d_2^g : H_p(G^g, HC_q(A,\alpha_g,ord(g);W)) \to H_{p-2}(G^g, HC_{q+1}(A,\alpha_g,ord(g);W))$$

la différentielle de la suite spectrale du théorème (1.5). Du théorème précédent en déduit

2.6.1 Corollaire

$$d_2^g = \Theta_q(g,A,W)\cap$$

3. Produits croisés et groupes de surfaces

Rappelons qu'un groupe de surface G, est de dimension (co)-homologique égale à deux, et admet la présentation $G = \langle \alpha_i, \beta_i, R(\alpha_i,\beta_i)\rangle$, où les α_i, β_i sont les générateures et $R(\alpha_i,\beta_i)$ la relation. C'est un groupe sans torsion, notons par $F = \langle \alpha_i, \beta_i\rangle$ le groupe libre ayant les mêmes générateures, et par $PHC_* = PHC_{pair} \oplus PHC_{imp}$, la $\mathbb{Z}_2$-graduation de l'homologie cyclique périodique. Le théorème suivant est énoncé en homologie cyclique périodique mais on a des résultats de même type dans les autres homologies cycliques. Si l'opération de G est triviale sur $PHC_*(A)$, alors :

3.1 Théorème *Il existe une suite exacte à six termes :*

$$\begin{tikzcd}
PHC_{pair}(A \rtimes F) \arrow[r] & PHC_{pair}(A \rtimes G) \arrow[r] & H_2(G, PHC_{pair}(A)) \arrow[d, "\partial"] \\
H_2(G, PHC_{imp}(A)) \arrow[u, "\partial"] & PHC_{imp}(A \rtimes G) \arrow[l] & PHC_{imp}(A \rtimes F) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

L'opérateur bord ∂ est donné par la classe caractéristique

$$\Theta_q(e, A, k[u, u^{-1}]) \in Ext^2_G(PHC_{pair}(A), PHC_{imp}(A))$$

Démonstration

La suite spectrale associée à G, notée $E^2_{*,*}(G)$, est concentrée sur les trois colonnes $p = 0, 1, 2$. Les deux première colonnes correspondent à la suite spectrale notée $E^2_{*,*}(F)$. On en déduit la suite exacte de complexes

$$0 \to (E^2_{*,*}(F),\ 0) \to (E^2_{*,*}(G),\ d_2) \to E^2_{*,*}(G)[2],\ 0) \to 0$$

On note par $\Im^*(G)$ (resp, $\Im^*(F)$) la filtration sur l'aboutissement $PHC_*(A \rtimes G)$, (resp $PHC_*(A \rtimes F)$. D'une part, on a les suites exactes courtes déduites de la convergence

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 \to \Im^0(F) \to \Im^1(F) \to \Im^1(F)/\Im^0(F) \to 0 \\ (2) & 0 \to \Im^0(G) \to \Im^1(G) \to \Im^1(G)/\Im^0(G) \to 0 \\ (3) & 0 \to \Im^1(G) \to \Im^2(G) \to \Im^2(G)/\Im^1(G) \to 0 \end{array}$$

d'autre part, on a les identifications suivantes:

$$\Im^2(G) = PHC_n(A \rtimes G) \quad , \quad \Im^1(F) = PHC_n(A \rtimes F)$$
$$\Im^0(G) = E^\infty_{0,n}(G) = E^3_{0,n}(G) = Coker d_2 \ \ , \ \ \Im^0(F) = E^\infty_{0,n}(F) = E^2_{0,n}(F) = E^2_{0,n}(G)$$
$$\Im^2(G)/\Im^1(G) = E^\infty_{2,n-2}(G) = E^3_{2,n-2}(G) = ker d_2$$
$$\Im^1(G)/\Im^0(G) = E^\infty_{1,n-1}(G) = E^3_{1,n-1}(G) = E^2_{1,n-1}(G)$$
$$\Im^1(F)/\Im^0(F) = E^\infty_{1,n-1}(F) = E^3_{1,n-1}(F) = E^2_{1,n-1}(G).$$

On obtient les suites exactes :

$$\begin{array}{ll} (1) \Rightarrow (1') & 0 \to E^2_{0,n}(G) \to PHC_n(A \rtimes F) \to E^2_{1,n-1}(G) \to 0 \\ (2) \Rightarrow (2') & 0 \to Coker d_2 \to \Im^1(G) \to E^2_{1,n-1}(G) \to 0 \\ (3) \Rightarrow (3') & 0 \to \Im^1(G) \to PHC_n(A \rtimes G) \to ker d_2 \to 0 \end{array}$$

Les suites exactes (1') et (2) donnent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & E^2_{0,n}(G) \arrow[d, "d_2"] & \\
0 \to E^2_{0,n}(G) \arrow[r] \arrow[d] & PHC_n(A \rtimes F) \arrow[r] \arrow[d] & E^2_{1,n-1}(G) \to 0 \arrow[d, "\wr"] \\
0 \to Coker d_2 \arrow[r] & \Im^1(G) \arrow[r] \arrow[d] & E^2_{1,n-1}(G) \to 0 \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte :

$$(4) \quad 0 \to Imd_2 \to PHC_n(A \rtimes F) \to \Im^1(G) \to 0$$

On obtient la suite exacte longue :

$$\to H_2(G, PHC_{n-1}(A)) \to PHC_n(A \rtimes F)$$
$$\to PHC_n(A \rtimes G) \to H_2(G, PHC_{n-2}(A)) \to$$

en contractant les suites exactes (1'), (3') et (4). La dernière partie de la proposition résulte de ce que ∂ est la différentielle d_2^e qu'on a calculée dans le corollaire (2.6.1).

3.2 Proposition

Il existe une suite exacte à six termes

$$\begin{tikzcd}
PHC_{pair}(A) \arrow[r, "1-\alpha_*"] & PHC_{pair}(A) \arrow[r] & PHC_{pair}(A[t,t^{-1}])) \arrow[d] \\
PHC_{imp}(A[t,t^{-1}]) \arrow[u] & PHC_{imp}(A) \arrow[l] & PHC_{imp}(A) \arrow[l, "1-\alpha_*"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration.

La suite spectrale prend la forme suivante

$$E^2_{*,*} = H_*(\mathbb{Z}, PHC_*(A)) \Longrightarrow PHC_*(A \rtimes \mathbb{Z})$$

Dans ce cas, on a uniquement deux colonnes $p = 0, 1$ les seuls termes non nuls sont :

$$E^2_{0,*} = H_0(\mathbb{Z}, PHC_*(A) = PHC_*(A)_{\mathbb{Z}}$$

$$E^2_{1,*} = H_1(\mathbb{Z}, PHC_*(A)) = PHC_*(A)^{\mathbb{Z}}$$

et $E^2 = E^\infty$. L'isomorphisme

$$Ext^2_{\mathbb{Z}}(PHC_*(A), PHC_{*+1}(A)) \cong H^1(\mathbb{Z}, Ext(PHC_*(A), PHC_{*+1}(A)))$$

déduit de la proposition (2.3) montre que la classe caractéristique $\Theta_q(e, A, k[u, u^{-1}])$ est un élément de $H^1(\mathbb{Z}, Ext(PHC_*(A), PHC_{*+1}(A)))$. Le lemme suivant montre comment elle intervient dans la suite exacte précédente.

3.3 Lemme [9]

Soient F un groupe libre de générateures $(\alpha_i)_{i\in I}$, et A, B des F-modules. Toute classe $\Theta \in H^1(F, Ext(A, B))$ détermine une suite exacte :

$$0 \to Coker\ \partial_B \to E \to ker\ \partial_A \to 0$$

où $\partial_A : \bigoplus_{i\in I} A \to A$ défini par $\partial(\bigoplus_{i\in I} c_i) = \bigoplus_{i\in I}(c_i - \alpha_i c_i)$

Plus généralement pour un groupe libre F de systémes de générateures $(\alpha_i)_{i\in I}$. On obtient la généralisation suivante

3.4 Proposition *On a la suite exacte :*

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{i\in I} PHC_{pair}(A) & \xrightarrow{\partial} & PHC_{pair}(A) & \longrightarrow & PHC_{pair}(A \rtimes F) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
PHC_{imp}(A \rtimes F) & \longleftarrow & PHC_{imp}(A) & \xleftarrow{\partial} & \bigoplus_{i\in I} PHC_{imp}(A)
\end{array}$$

$\partial(\bigoplus_{i\in I} c_i) = \bigoplus_{i\in I}(c_i - \alpha_{*_i}(c_i))$ *qui s'identifie la classe caractéristique*

$$\Theta_*(1, A, W) \in H^1(F, Ext(PHC_*(A), HC_{*+1}(A)))$$

On suppose maintenant $G = \mathbb{Z}^2$. C'est un groupe de surface qui admet la présentation $< \alpha, \beta, [\alpha, \beta] >$. On suppose de plus que $PHC_*(A)$ est un $\mathbb{Z}^2$-module trivial. Soit $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ le groupe libre a deux générateurs, α, β. On déduit du théorème (3.1) la proposition suivante

3.5 Proposition

Il existe une suite exacte à six termes :

$$\begin{array}{ccccc} PHC_{pair}(A \rtimes \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) & \longrightarrow & PHC_{pair}(A \rtimes \mathbb{Z}^2) & \longrightarrow & PHC_{pair}(A) \\ \uparrow \partial & & & & \downarrow \partial \\ PHC_{imp}(A) & \longleftarrow & PHC_{imp}(A \rtimes \mathbb{Z}^2) & \longleftarrow & PHC_{imp}(A \rtimes \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \end{array}$$

L'opérateur bord ∂ est donné par la classe caractéristique

$$\Theta_q(e, A, k[u, u^{-1}]) \in Ext^2_{\mathbb{Z}^2}(PHC_*(A), PHC_{*+1}(A))$$

Précisons maintenant comment les classes caractéristiques déterminent les groupes d'homologies $PHC_*(A \rtimes \mathbb{Z}^2)$.

3.6 Lemme [9] *Soient M, N des $\mathbb{Z}^2$ -modules triviaux. On a l'isomorphisme*

$$Ext^2_{\mathbb{Z}^2}(M, N) \cong Ext(M, N)^2 \oplus Hom(M, N).$$

D'aprés ce lemme la classe $\Theta_*(e, A, k[u, u^{-1}])$ définit deux extensions

$$0 \to PHC_*(A) \to PHC_*(A \rtimes (\alpha)) \to PHC_{*-1}(A) \to 0$$

$$0 \to PHC_*(A) \to PHC_*(A \rtimes (\beta)) \to PHC_{*-1}(A) \to 0$$

correspondant aux groupes libres engendrés par les deux générateurs, et une application $PHC_{imp}(A) \to PHC_{pair}(A)$ qui détermine en le composant par le premier morphisme $PHC_{pair}(A) \to PHC_{pair}(A \rtimes \mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ de la proposition (3.4), l'opérateur bord de la suite exacte proposition (3.5) dans ce cas.

En effet . On note par F_1 et F_2 les groupes libres engendrés respectivement par les générateurs α et β de $\mathbb{Z}^2$. La relation de commutativité représentée par la classe caractéristique seconde $\Theta_q(e, A, k[u, u^{-1}])$, qui ici est un homomorphisme $\Theta_q(e, A, k[u, u^{-1}])$:

$PHC_*(A) \to PHC_{*+1}(A)$ permet de relier les suites exactes courtes associées aux opérations de F_1 et F_2 et de déterminer complétement les groupes $PHC_*(A \rtimes \mathbb{Z}^2)$. En effet, comme α et β commutent, l'automorphisme $\beta : F_1 \to \mathrm{Aut}(A)$ induit une application

$$\beta_* : (A \rtimes F_1)^\natural \to (A \rtimes F_1)^\natural$$

donc au niveau de l'homologie une application

$$\beta_* : PHC_*(A \rtimes F_1) \to PHC_*(A \rtimes F_1)$$

On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to PHC_{*+1}(A) & \longrightarrow & PHC_{*+1}(A \rtimes F_1) & \longrightarrow & PHC_*(A) \to 0 \\
\Big\downarrow {\scriptstyle 0=1-\beta_*} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1-\beta_*} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 0=1-\beta_*} \\
0 \to PHC_{*+1}(A) & \longrightarrow & PHC_{*+1}(A \rtimes F_1) & \longrightarrow & PHC_*(A) \to 0
\end{array}$$

où l'application $\Theta_q : PHC_*(A) \to PHC_{*+1}(A)$ est définie par $\Theta_q(a) = (1-\beta_q)(b)$ où b est un relèvement de a. Θ_q est un élément de $Hom(PHC_*(A), PHC_{*+1}(A))$ qui s'identifie à la classe $\Theta_q(1, A, k[u, u^{-1}])$

Le groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ est engendré par les générateurs α et β. Dans la suite exacte de la proposition (3.5) l'opérateur bord ∂ est le composé de $\Theta_q(1, A, k[u, u^{-1}]) : PHC_*(A) \to PHC_{*+1}(A)$ avec le premier morphisme $PHC_{*+1}(A) \to PHC_{*+1}(A \rtimes \mathbb{Z} * \mathbb{Z})$ de la suite exacte proposition (3.4).

Bibliographie.

[1] **A. Bella Baci .** *Différentielle de la suite spectrale de Feigin-Tsygan-Nistor.* C.R.Acad. Sci. Paris t. 315, Série I, pp 531-536, 1992.

[2] **P. Baum-A. Connes .** *K-Theory for discrete groups.* Operator algebras and applications, D. Evans and M. Takesaki, eds, Cambridge University Press, 1988, pp. 1-20.

[3] **D. Burghelea.** *The homology of the group rings.* Comm. Math. Helv. 60 (1985), 354-365.

[4] **J. L. Brylinski.** *Algebras associated with group actions and their homology.* Brown preprint 1987.

[5] **H. Cartan-S. Eilenberg .** *Homological Algebra* Princeton 1956).

[6] **A. Connes .** *Non Commutative Geometry* Academic Press (1994).

[7] **A. Connes .** Cohomologie cyclique et Foncteur Ext^n. C.R.A.S Paris 296 pp:953-958 (1983).

[8] **B.L. Feigin-B.L. Tsygan .** Additive K-theory L.N.M 1289 (1987).

[9] **E. Fieux .** *Classes caractéristiques dune π-algbre et suite spectrale en K-theorie bivariante.* K-Theory 5 , pp: 71-96 (1991).

[10] **E. Getzler and J. Jones .** *The cyclic homology of crossed algebras* J. Reine Angew Math 445 (1993) pp 161-174.

[11] **M. Karoubi .** *Homologie cyclique et K-théorie.* Astérisque 149 (1987)

[12] **C. Kassel .** *Cyclic homology, comodules and mixed complexes.* J.Algebra 107 pp:195-216 (1988).

[13] **A. Legrand .** *Caractérisation des opérations d'algèbres sur les modules différentiels* . Composito Math 66 pp:23-36 (1988).

[14] **J.L. Loday .** *Cyclic Homology* Grand.Math.Xiss., Springer Verlag 1993.

[15] **S. Maclane.** *Homology.* Berlin-Gottingen-Heidelberg Springer (1963).

[16] **V. Nistor .** *Group cohomology and the cyclic cohomology of crossed products* . Ivent.Math. 99 pp 411-424 (1990) .

[17] **R. Nest .** *Cyclic cohomology of of crossed products with $\mathbb{Z}$.* J. Funct. Anal. 80, 235-283 (1988)

[18] **N. Yoneda .** *On the homotopy theory of modules.* Jour. Fac. Sci. Uni Tokyo (sect. 1) 7 pp:193-227 (1954).