

Verslagen van de **Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007**
58th European Study Group Mathematics with Industry

Bennie Mols



St u d i e g r o e p
e p **W** i s k u n d e
d e m e t d e
I n d u s t r i e

Verslagen van de Studiegroep

Wiskunde met de Industrie 2007

58th European Study Group Mathematics with Industry

Universiteit Utrecht



[Faculty of Science
Mathematics]

Universiteit Utrecht



**Verslagen van de Studiegroep
Wiskunde met de Industrie 2007**

**58th European Study Group
Mathematics with Industry**

29 januari - 2 februari 2007

Bennie Mols

december 2007

www.math.uu.nl/swi2007

Voorwoord

Dit boekje is het eerste deel van de proceedings van de 58e Europese Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007, die van 29 januari tot en met 2 februari 2007 werd gehouden in Utrecht. In totaal 79 deelnemers hebben zich in die week geworpen op zes vraagstukken afkomstig uit het bedrijfsleven in een poging een oplossing te vinden. De meeste deelnemers kwamen uit Nederland of België, maar ook waren er wiskundigen uit Engeland, Frankrijk, Ierland en Polen.

Wetenschapsjournalist Bennie Mols heeft op basis van interviews met deelnemers en probleemstellers voor elk van de zes problemen een helder beeld gegeven voor een groot publiek van probleem, oplosmethode(n), resultaten, en ook van de manier waarop de oplossing tot stand is gekomen.

De problemen waren van zeer uiteenlopende aard. KLM vroeg hoe het aantal benodigde reservedagen voor cabinepersoneel verminderd kon worden. Een zieke steward of stewardess wordt vervangen door een reservepersoneelslid dat speciaal stand-by staat, maar als deze opgeroepen wordt en zijn/haar vervolgschema moet wijzigen levert dit weer verdere verstoringen op. Aan de wiskundigen de taak dit domino-effect te verminderen.

Innogrow ontwikkelt een gesloten broeikas met ondergrondse opslag van warmte en kou. Dit bedrijf vroeg de deelnemers te zoeken naar een methode om dit systeem te optimaliseren, door het energieverbruik te verminderen en de opbrengst te vergroten.

ASML, producent van machines voor de fabricatie van computerchips, vroeg om een nadere studie van de maskerloze lithografietechniek, in het bijzonder om een betere discretisatiemethode te vinden voor de vertaling naar een rooster van pixels met de juiste grijswaarden.

Het AMC in Amsterdam wilde graag meer inzicht in de effecten van het gebruik van een hulppomp na acuut hartfalen. De wiskundigen hebben hiertoe tijdens de studieweek razendsnel een realistisch, kloppend model van het hart gemaakt.

Het UMC in Utrecht stelde als uitdaging het optimaliseren van het electromagnetische veld in hun nieuwe MRI-scanner met een sterkte van 7 tesla, met als doel de rekentijd op een computer van vele uren naar enkele minuten terug te brengen. Dit moet het mogelijk maken het veld in redelijke tijd op de individuele patiënt af te stemmen.

De ING bank wil, net als andere banken, de prijs van een optie snel en zorgvuldig kunnen bepalen. Dit kost veel rekentijd. Betere rekenmodellen, die zowel de rente als de beweeglijkheid van de onderliggende aandelen mee in beschouwing nemen, moeten zo'n snelle prijsbepaling mogelijk maken. Aan de studiegroep de opgave hier nieuwe richtingen in aan te geven.

In alle gevallen is men tijdens en na de studieweek tenminste tot een gedeeltelijke oplossing gekomen, en in een aantal gevallen tot een volledige, praktisch bruikbare oplossing. De zes verslagen in dit boekje vertellen hierover en laten zien wat de bedrijven vervolgens met de oplossingen gedaan hebben. In het tweede deel van de proceedings, bedoeld voor een wetenschappelijk publiek en geschreven in het Engels, worden de gedetailleerde oplossingen gegeven door de deelnemers zelf.

Wij danken allen die deze studiegroep tot zo'n groot succes hebben helpen maken: allereerst de genereuze hoofdsponsors STW en NWO, die al vele jaren dit festijn mogelijk maken, het CWI dat het drukken van de wetenschappelijke proceedings verzorgt en financiert, en daarnaast het ECMI, het GQT cluster, en ITW. Tot slot danken wij Hans Gooszen voor uitmuntende secretariële ondersteuning, de bedrijven voor hun inspirerende problemen en ook hun betrokkenheid in alle fasen van de studieweek, en tot slot de deelnemers, die zoveel energie, vindingrijkheid en passie hebben laten zien bij het zoeken naar de oplossingen.

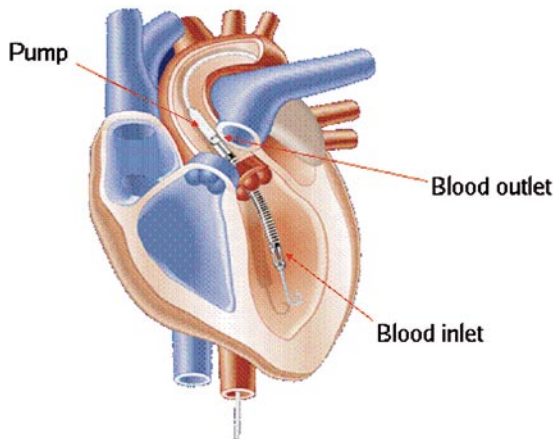
Utrecht, december 2007

Rob Bisseling, Karma Dajani, Tammo Jan Dijkema, Johan van de Leur,
Paul Zegeling (organisatiecommissie SWI2007)

Pompje helpt hartpatiënten

Bij patiënten met een acuut hartfalen, kan een klein pompje tijdelijk het pompen van het hart ondersteunen. Omdat niet alle relevante parameters te meten zijn in het hart van een patiënt, moet een wiskundig model die berekenen. Met deze kennis kan het pompje de patiënt nog beter helpen en kan hartschade worden verminderd.

Het hart is een holle, ongeveer vuistdikke spier, die bloed door het lichaam pompt door met een bepaalde regelmaat samen te trekken. Bij de mens bestaat het hart uit vier kamers, die door kleppen van elkaar gescheiden zijn. Samen vormen ze twee pompen, die achter elkaar zijn geschakeld. De ene dient voor de longcirculatie – in de longen neemt het bloed zuurstof op – en de ander voor de lichaamscirculatie. Het hart pompt zuurstofrijk bloed door het lichaam. Lichaamscellen verbruiken de zuurstof, waarna zuurstofarm bloed naar het hart terugkeert. In rust pompt het hart bij een gemiddelde volwassen persoon tussen vijf en zeven liter bloed per minuut rond. Het aantal hartslagen ligt daarbij tussen de zestig en honderd per minuut.



Een via een katheter in het hart gebracht pompje

In 2004 startte in het Academisch Medisch Centrum (AMC) in Amsterdam het programma *Mechanical assistance in congestive heart failure*. In het kader van dit programma is voor verschillende groepen hartpatiënten de toepassing van een klein hartpompje (de Impella-hartpomp) onderzocht. Met het onderzoek naar deze mechanische hartondersteuning loopt het AMC voorop in de wereld.

Het pompje stuwt het bloed met een bepaalde snelheid van de linker hartkamer naar de aorta, en ondersteunt zo de normale hartfunctie. Aan de ene kant is hij bedoeld voor hartpatiënten die een dotterbehandeling met een hoog risico moeten ondergaan. Het pompje moet dan tijdens het dotteren de bloedcirculatie ondersteunen. Deze patiënten lopen namelijk de kans dat ze in een cardiogene shock raken, wat gepaard gaat met een plotselinge daling van de bloeddruk, een verhoogde hartslagfrequentie, vaatvernauwing en ernstige kortademigheid.

Aan de andere kant wordt hetzelfde pompje ook gebruikt bij patiënten die een hartinfarct hebben gehad. Het idee is dat door de pompondersteuning minder hartspierweefsel afsterft en dat de hartfunctie beter herstelt na het infarct. In maart 2007 werden op een congres van de American College of Cardiology in New Orleans de eerste resultaten gepresenteerd. De patiënten die na het hartinfarct ondersteuning kregen van een pompje, vertoonden een belangrijke verbetering van de hartfunctie.

Geen ingrijpende operatie nodig

Het pompje bestaat in twee versies: een die het bloed met een snelheid van 2,5 liter per minuut rondpompt, en een die een maximum haalt van vijf liter per minuut. Het eerste pompje, dat uiteindelijk in de modellen van de studiegroep is gebruikt, meet vier millimeter in doorsnede en is ongeveer vijf tot zes centimeter lang. Er zit een klein motortje in, dat een soort schroef van Archimedes aandrijft. Het pompje wordt via de liesslagader naar de grote lichaamsslagader geschoven, en van daaruit verder door de aortaboog tot in de linker hartkamer. De katheter waarmee het pompje door de aderen wordt ingebracht zorgt ook voor de elektriciteit die het pompje nodig heeft. Het grote voordeel van dit pompje is dat er geen ingrijpende borstkasoperatie voor nodig is om hem in het hart aan te brengen.

Krischan Sjauw werkt als arts-onderzoeker en promovendus op de cardiologieafdeling van het AMC. “Wij hebben in de afgelopen drie jaar bij zo’n zeventig patiënten het hartpompje ingebracht. Hoewel we zien dat het pompje het hart ondersteunt wat betreft de bloedstroom en de bloeddruk, weten we niet precies welk deel van de bloedstroom het pompje voor zijn rekening neemt en welk deel het hart zelf verzorgt. Dat kunnen we niet direct in de patiënt meten. Daarnaast weten we niet precies of de huidige manier om de bloedstroom indirect te bepalen geschikt is in aanwezigheid van de hartpomp. De hartpomp verandert namelijk de bloeddoorstroming. Toch willen we graag het antwoord weten. Dan kunnen we namelijk bepalen in hoeverre een patiënt afhankelijk is van de pomp, of de pomp harder moet werken of juist minder hard, en wanneer we de ondersteuning kunnen afbouwen, zodat het hart het bloed uiteindelijk weer helemaal op eigen kracht rondpompt.”

Professor Bas de Mol van de afdeling hartchirurgie van het AMC wees Sjauw op het bestaan van de studiegroep. Hij had een paar jaar geleden al eens een ander medisch probleem ingebracht bij de studiegroep wiskunde met de industrie. Sjauw: “Onze vraag aan de studiegroep was of ze een wiskundig model konden maken dat berekent hoeveel bloed het hart zelf rondpompt, en hoeveel het pompje voor zijn rekening neemt. In een experimentele omgeving, buiten het lichaam, is daar wel naar gekeken, maar eenmaal in het lichaam kunnen we niet exact meten wat er verandert door het aanbrengen van de pomp.”

Elektrisch netwerk

Het lijkt voor de hand te liggen om de bloedstroming in en rond het hart in drie dimensies te simuleren. Gewoon de geometrie van het hart en de aderen modelleren, en dan de stroming van het bloed met computational fluid dynamics nabootsen. Hoewel daar verschillende modellen en numerieke technieken voor bestaan, zijn die rekenintensief en missen ze de flexibiliteit om door te rekenen wat er gebeurt als het hart van een pompje wordt voorzien.

“We hebben er daarom voor gekozen om het probleem te modelleren naar analogie met een elektrisch netwerk”, vertelt Michel Vellekoop, wiskundige

van de Universiteit Twente. “Dan hoef je niet alle stromingsdetails van het systeem mee te nemen. Die details worden in de modellering automatisch uitgemiddeld. Het pompje representeren we dan als een batterij, de elasticiteit van de aderen als condensatoren, de wrijving die het bloed voelt, als weerstanden, en de traagheid van het bloed als een spoel. De vraag is dan hoe je al die componenten goed aan elkaar moet knopen zodat het elektrische netwerk inderdaad een hart met een pompje erin voorstelt.”

Op zo’n elektrisch netwerk gelden de twee wetten van Kirchhoff: behoudswetten voor lading en energie. De eerste wet van Kirchhoff stelt dat op elk punt in het netwerk de som van de in- en uitstromende ladingen gelijk aan nul is. Voor het cardiovasculaire systeem komt de elektrische lading overeen met het bloedvolume. Volgens de tweede wet van Kirchhoff moet de som van de potentiaalverschillen in een gesloten lus gelijk aan nul zijn. In het cardiovasculaire systeem is het potentiaalverschil analoog aan een drukverschil. De wiskundigen hebben de eenvoudige sommaties uit de twee wetten van Kirchhoff vertaald in een stelsel van twaalf gekoppelde differentiaalvergelijkingen.

Vellekoop: “Dat stelsel kunnen we niet analytisch oplossen. De hartklep bijvoorbeeld, blijkt een niet-lineair element te zijn, waar je analytisch niet ver mee komt. Daarom hebben we het programma Matlab gebruikt om de oplossingen numeriek te simuleren. We hebben verder aangenomen dat de pomp een constante pompsnelheid van 2,5 liter per minuut levert.”

Kalibratie

Typisch zijn alleen meetgegevens bekend van de druk en het volume van het bloed in de hartkamers. Door het modelsysteem zo te regelen dat deze meetgegevens worden gereproduceerd, hoopten de wiskundigen de niet meetbare grootheden – hoeveel van het werk van het hart de pomp heeft overgenomen – toch op een betrouwbare manier te berekenen.

“Om ons model te vergelijken met de experimenteel bekende gegevens, hebben we de druk in de linker hartkamer als functie van het volume berekend”, vertelt Vellekoop. “Ons model slaagt er dan aardig in de meetgegevens te reproduceren. Dat gaf ons het vertrouwen dat we ook iets zinvol kunnen zeggen over de niet te meten grootheden. Zo hebben we de

bloedstroom door de pomp als functie van de tijd berekend. Dat is waar het AMC naar zocht.”

Het belangrijkste resultaat dat uit de simulaties volgt, is dat de extra weerstand die de pomp zelf aan het systeem toevoegt, een belangrijke parameter in het hele systeem blijkt te zijn. Vellekoop: “De pomp zorgt voor een extra weerstand in de aorta. Die weerstand hangt van allerlei factoren af, en levert een niet-lineaire bijdrage. Omdat de weerstand per pomp en per patiënt kan verschillen, denken we dat er meer onderzoek nodig is om die bijdrage verder te onderzoeken.”

Ook blijkt uit de resultaten dat er een terugstroom mogelijk is als de pomp te weinig bloed rondpompt. Dat zou een sterk ongewenste situatie opleveren. Krischan Sjaauw van het AMC: “Deze situatie zou je kunnen vergelijken met het inbrengen van de pomp, wanneer de pomp nog niet op volle toeren draait. Alleen duurt dit maar hooguit een minuut. Zodra de pomp namelijk is ingebracht, wordt de pomp snel ingeschakeld en levert hij genoeg bloedstroom om terugstroom te voorkomen.”

Verder laten de berekeningen zien dat de pomp de bloeduitstroom van het hart onder normale omstandigheden met zeven procent vergroot: van 5,54 tot 5,95 liter per minuut. Dat is het netto resultaat van een toename van ongeveer 1,5 liter per minuut in bloeduitstroom tijdens de relaxatiefase van het hart, en een afname van ongeveer 1,1 liter per minuut in bloeduitstroom tijdens de fase waarin het hart samentrekt.

Zwak hart

De wiskundigen denken dat het model zich gemakkelijk laat aanpassen om complexere omstandigheden door te rekenen. Daarbij is het niet nodig om het bloedvatstelsel in meer detail mee te nemen, omdat blijkt dat het huidige model de dynamica van de bloedstromen door de vaten goed genoeg meeneemt. Ze bevelen aan dat verder onderzoek zich concentreert op de exacte relatie tussen de druk en de stroming door de pomp onder meer extreme omstandigheden. Het huidige model richt zich alleen op een constante pompsnelheid. Maar het model biedt ook de mogelijkheid om te onderzoeken of het variëren van de pompsnelheid misschien betere resultaten levert onder bepaalde omstandigheden.

Nu zijn de gebruikte meetgegevens nog afkomstig van een gezond persoon. Een zwak hart is echter minder elastisch. Een andere uitdaging voor de toekomst is daarom volgens Vellekoop om het model daarop aan te passen, wat een iets ander verband tussen druk en volume levert: "Ik denk dat we dat kunnen aanpassen door de condensatoren in het elektrische model iets te wijzigen."

"In de korte tijd van een week heeft de studiegroep knap werk geleverd", vertelt Krischan Sjaauw. "Ze hebben de pomp gemodelleerd, en een aantal situaties gesimuleerd. Het is een eerste, veelbelovende aanzet. De studiegroep heeft ons een nieuwe kijk op het probleem gegeven, bijvoorbeeld dat de weerstand van de pomp zelf zo'n belangrijke rol blijkt te spelen. Verder zijn er ook enkele nieuwe vragen naar boven gekomen. Het AMC zou via bijvoorbeeld een afstudeerproject ook graag verder gaan met een wiskundig onderzoek van het probleem. Ook willen we het model verder doortesten met patiëntgegevens."

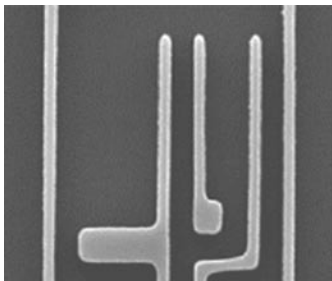
Computerchips schrijven met een beamer

Momenteel worden computerchips gemaakt door licht via een masker op de chip te laten vallen – een soort diaprojectie.

ASML onderzoekt een nieuwe, maskerloze techniek, die net als een beamer werkt. Het traditionele, continue masker moet daarvoor worden vertaald naar een discreet grid van pixels.

De daarvoor benodigde rekentijd is gigantisch.
De uitdaging voor wiskundigen is om het aantal rekenstappen flink te reduceren.

Het Veldhovense bedrijf ASML is een wereldleider in lithografietechnieken voor de halfgeleiderindustrie. Lithografiemachines schrijven met ultraviolet licht structuren op een siliciumschijf, de *wafer*. De golflengte van dit licht is in de loop van de jaren afgenomen van 365 nanometer naar 193 nanometer (een nanometer is een miljoenste millimeter), en de structuren zijn gekrompen tot 45 nanometer. Hoe kleiner de structuren die de machine op een *wafer* kan afbeelden hoe meer transistoren per vierkante millimeter geplaatst kunnen worden en hoe krachtiger de computerchip wordt. Eén enkele wafer bestaat uit een herhaald patroon van dezelfde computerchips. Bijna alle grote chipfabrikanten zoals IBM, Motorola en Samsung gebruiken ASML-machines.



resist



mask

Voorbeeld van een traditioneel masker en de bijbehorende afdruk op een chip.

Tot nu toe werkten lithografiemachines volgens het principe van een diaprojector. In de lithografie heet die 'dia' een masker. Het masker bevat het patroon dat op de wafer wordt geprint. Het bepaalt waar op de chip wel en waar niet een lijntje wordt geprint. ASML onderzoekt nu of maskerloze lithografie een interessante optie is. Het idee is om van het principe van een diaprojector over te stappen op het principe van een 'beamer'. De 'beamer' gebruikt geen masker meer, maar creëert meteen een lichtpatroon dat direct op de siliciumwafer wordt afgebeeld.

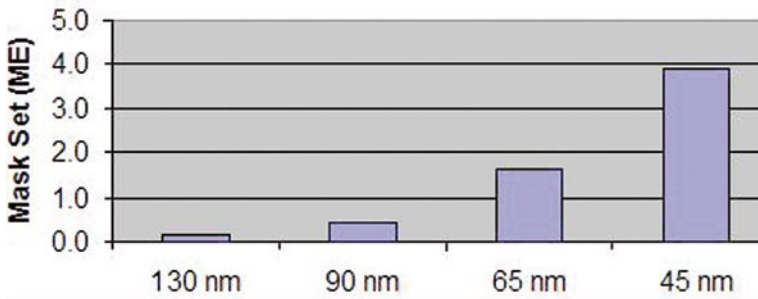
"In feite willen we het conventionele masker nabootsen via een systeem met miljoenen microscopische spiegeltjes", vertelt Wouter Mulckhuysen van ASML. "Neem een chip van 1 bij 1 centimeter, waarop je lijnen wilt schrijven van 45 nanometer breed. Stel dat je daarvoor pixels van twintig nanometer gebruikt. Dan heb je daarvoor 250 miljard pixels nodig. En elk pixel komt overeen met een spiegelstand. De vraag is vervolgens wat de juiste stand is van elk spiegeltje zodat we het gewenste patroon kunnen printen."

"Ons probleem zit vooral in het voortraject van het aansturen van de spiegels", legt projectleider Gosse de Vries van ASML verder uit. "Klanten die de lithografiemachine gebruiken, leveren een masker aan dat bestaat uit een heleboel veelhoeken. Dat is een continu patroon. Maar dat continue patroon moeten we samplen om er een discreet patroon van te maken. We zoeken een vertaling van het continue domein van veelhoeken naar een discreet patroon van pixels die een bepaalde grijswaarde hebben."

Kunnen de pixels niet ofwel wit ofwel zwart zijn – ofwel er is een lijntje, ofwel er is geen lijntje? Nee, dat kan in het algemeen niet. Een overgang van een lijn naar een tussenruimte kan immers midden in een pixel vallen. De pixel krijgt dan een grijswaarde tussen wit en zwart in, afhankelijk van hoeveel van de lijn binnen het pixel valt. En omdat een chippatroon uit heel veel overgangen van een lijn naar een tussenruimte bestaat, hebben de meeste pixels een grijswaarde die tussen zwart en wit in ligt. De Vries: "Ons rekenprobleem zit nu in het met grote nauwkeurigheid berekenen van die grijswaarden."

Voor kleine oplages

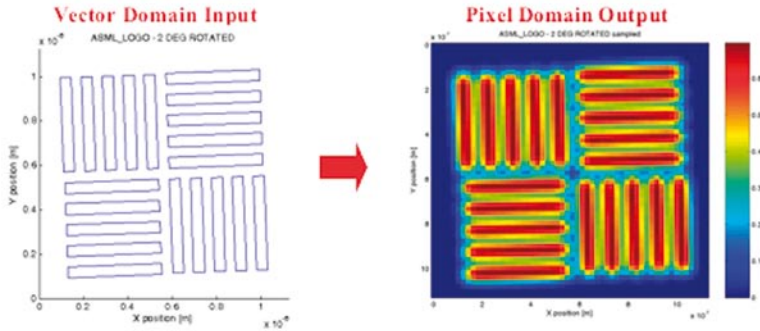
Maskerloze lithografie zal de op maskers gebaseerde lithografie echter niet gaan vervangen, omdat de traditionele methode in dezelfde tijd meer chips kan printen. Toch biedt de beamermethode in een aantal gevallen belangrijke voordelen ten opzichte van de diaprojectiemethode. Ten eerste worden hoge maskerkosten bij kleine oplages vermeden. De maskerkosten zijn met het verkleinen van de af te beelden structuren exponentieel gestegen. Waar een maskerset voor negentig nanometer nog een half



Met een afnemende structuurgrootte op de chip, nemen de maskerkosten exponentieel toe.

miljoen euro kostte, kost een maskerset nu, voor 45 nanometer, al bijna vier miljoen euro. Door de maskerkosten uit te sparen, kan een producent veel goedkoper kleine series, of zelfs unieke chips maken. Ten tweede kan de fabrikant veel goedkoper prototypen maken en tests draaien tijdens het ontwikkelen van de chip.

Omdat de klant direct over moet kunnen stappen van het testen met een maskerloos lithografiesysteem naar het produceren met een conventioneel maskergebaseerd lithografiesysteem, moet het maskerloze systeem het conventionele systeem imiteren met alle onvolkomenheden die in het maskersysteem zitten. Die onvolkomenheden ontstaan door optische afwijkingen. De kleine golflengte van het gebruikte uv-licht is niet verwaarloosbaar ten opzichte van de patronen in het masker. Daardoor wordt licht door het masker verstrooid: het komt niet alleen terecht op een plek waar dat volgens het masker zou moeten, maar ook een beetje



De input en de output bij de nieuwe methode om structuren op chips te schrijven.

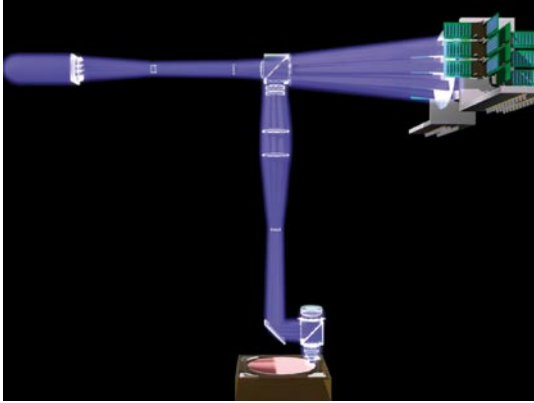
daarbuiten. Het ontwerp van het masker wordt daarvoor gecorrigeerd. Maar dat betekent ook dat het ontwerp van het maskerloze patroon diezelfde correctie moet meenemen.

De studiegroep van wiskundigen ging uit van een stukje chip met afmetingen van 150 bij 50 micrometer. Het patroon dat in zo'n stukje moet worden belicht, bevat typisch zo'n zes miljoen veelhoeken, met elk gemiddeld twintig hoekpunten. Dat patroon moet nu worden afgebeeld op een grid met pixels die elk een grootte van twintig bij twintig nanometer hebben. Om voor de hele chip te berekenen hoe het continue patroon moet worden gesampled tot een discreet patroon, blijken nu 1017 rekenoperaties nodig te zijn.

“En we hebben maar een uur voor de berekeningen”, zegt Mulckhuysen. “Dat lukt een gewone computer met een pentiumchip niet. Onze vraag aan de wiskundigen was dan ook om het aantal rekenoperaties bij het samplen significant terug te brengen.”

Fourierwereld

Wat het masker met het licht doet, valt wiskundig gezien handig te analyseren in de wereld van frequenties, in plaats van in de ‘gewone’ wereld van plaats en tijd. Om een signaal in de ‘gewone’ wereld om te zetten in de frequentiewereld, is een wiskundige truc nodig die Fouriertransformatie heet. “Licht dat door het masker wordt vervormd, heeft een bepaalde frequentie-inhoud. De projectielens verwijdert de hoge



Het nieuwe projectiesysteem dat met spiegeltjes het gewenste patroon direct – zonder masker – afbeeldt op de chip

frequenties uit deze Fourierwereld”, vertelt Eric Cator van de Technische Universiteit Delft. “Wat je dan overhoudt, kun je vanuit de frequentiewereld weer terugtransformeren naar de gewone wereld. In principe is het probleem goed gedefinieerd en oplosbaar, alleen kost het veel rekentijd. Je moet een discrete Fouriertransformatie op een raster met 1013 rasterpunten gaan doen.”

Het idee van de wiskundigen was nu om de scherpe hoeken in al die veelhoeken een beetje af te vlakken. Want juist die scherpe hoeken corresponderen met de hoge frequenties, die je toch niet kan afbeelden, maar wel voor meer rekenwerk zorgen. Cator: “Als je eerst de hoeken afvlakt, en daarna de Fouriertransformatie uitvoert, dan heb je in principe een minder fijn grid nodig om toch de juiste precisie te halen. En inderdaad: dat principe werkt. Maar er zit een adder onder het gras. Want nu heb je het probleem verschoven naar het afvlakken van de hoeken. Dat werd onze nieuwe bottleneck.”

De wiskundigen onderzochten twee manieren om toch tot een snellere oplossing te komen. In de eerste manier werd de berekening voor het afvlakken niet exact uitgerekend, maar numeriek benaderd. Cator: “Onze simulaties laten zien dat je dan een factor vier winst kunt behalen, maar dat is eigenlijk veel minder dan ASML nodig heeft.”

De tweede manier gebruikt een meer exotische truc. Alle veelhoeken

worden benaderd door een collage van aan elkaar geplakte driehoekjes. Cator: "Dat valt vrij snel uit te rekenen. Vervolgens ga je alle wiskundige operaties op die driehoekjes doen. Maar in plaats van dat we elke keer per driehoek een rekensom oplossen, maken we een opzoektabel met de uitkomst van een flink aantal driehoeken. En dan zoeken we voor een willekeurige driehoek de best passende in de tabel op. Met een relatief kleine opzoektabel krijgen we dan toch een hoge nauwkeurigheid. Weliswaar krijgen we zo tien- tot twintigmaal zo veel driehoeken als het oorspronkelijke aantal veelhoeken, maar de berekeningen per driehoek zijn nu een stuk overzichtelijker geworden."

Hoeveel sneller deze methode in de praktijk werkt, konden de wiskundigen echter niet bepalen, omdat een week daarvoor te kort was. "Of de methode met de opzoektabel sneller werkt, hangt sterk af van hoe groot de tabel is, hoe snel de computerprocessor is, en hoe groot het computergeheugen is", zegt Wouter Mulckhuysen van ASML. "Maar we denken dat de verbetering niet genoeg is."

Computers parallel schakelen

Toch is ASML niet teleurgesteld door het resultaat. Mulckhuysen: "Wij hebben meegedaan met de studieweek om te kijken of we zelf met onze eigen methode toch niet dingen over het hoofd hadden gezien. We hebben nu eigenlijk de bevestiging gekregen dat dat waarschijnlijk niet het geval is. Onze eigen samplemethode bleek al behoorlijk efficiënt te zijn. Dat vertrouwen in onze eigen aanpak is voor ons de meerwaarde van de studieweek geweest."

Hoe gaat ASML het rekenprobleem dan in de toekomst oplossen? "We gaan niet verder zoeken naar een snellere rekenmethode", zegt projectleider Gosse de Vries. Het komt er op neer dat we voor het sampleprobleem gewoon meer computerkracht gaan inzetten. We gaan computers parallel schakelen, en als we dat met genoeg computers doen, dan lossen die het sampleprobleem toch binnen een uur op. We zochten een alternatief in een slimmere rekenmethode, maar als wij die niet kunnen vinden, en de studiegroep ook niet, dan rest ons niets anders dan meer computerkracht. En dankzij de vooruitgang in de lithografie, is dergelijke hardware gelukkig beschikbaar."

Optieprijsen in een formule

Op de financiële markt worden allerlei soorten opties verhandeld. Banken en andere financiële instellingen willen een redelijke prijs bepalen voor zulke producten. Hoewel de onderliggende wiskunde in theorie bekend is, kost de oplossing veel rekentijd. De wiskundige uitdaging is om de optieprijs snel, maar ook zo realistisch mogelijk te berekenen.

Een optie is een recht om tegen een vooraf bepaalde prijs, en binnen een vooraf afgesproken periode (variërend van maanden tot jaren), een bepaald aandeel op de financiële markt te kopen (call-optie) of te verkopen (put-optie). Voor dit recht betaalt de optiekoper een bedrag aan degene die het recht verleent. Een optie is een afgeleid product (een derivaat) omdat de



Een Amerikaans biljet uit 1916 dat honderd aandelen vertegenwoordigt.

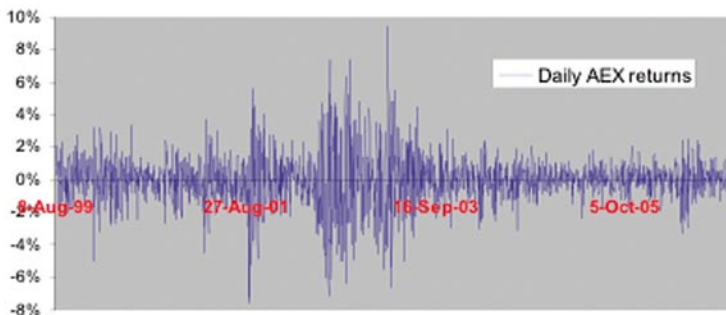
waarde afhangt van de waarde van het onderliggende aandeel, de looptijd, de beweeglijkheid van die waarde en de rente.

Stel dat een bepaald aandeel vandaag 40 euro kost en dat je een call-optie koopt die je het recht geeft om over een jaar hetzelfde aandeel voor 45 euro te kopen. Dan hangt de waarde van de optie af van wat de koers van het aandeel over een jaar is. Stel, dat de koers dan 50 euro is, dan kun je het aandeel zoals afgesproken voor 45 euro kopen. Als je het dan meteen verkoopt, heb je een winst van 5 euro behaald, minus de kosten die je hebt gemaakt voor het kopen van de call-optie.

Naast eenvoudige call- en put-opties bestaan er ook meer exotische opties waarvan de waarde afhangt van een onderliggend aandeel. Financiële experts ontwikkelen voortdurend nieuwe producten om de productkeuze te vergroten. Banken zoals ING verkopen dit soort producten, en willen weten welke prijs ze ervoor kunnen vragen. Die prijs wordt bepaald met een wiskundig model. Omdat de prijs voortdurend kan variëren, wil ING de klant zo snel mogelijk laten weten wat een bepaalde optie kost. Een snelle en toch betrouwbare optieprijsbepaling kan de bank een concurrentievoordeel leveren.

Rente en beweeglijkheid

De prijs van een optie hangt af van de verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs. Die hangt zelf weer op een stochastische wijze af van twee belangrijke parameters: de rente en de volatiliteit, of



De verandering van de aandelenprijs gedeeld door de aandelenprijs (van de AEX-aandelen) in de periode augustus 1999 tot december 2006. Deze figuur laat duidelijk zien dat de volatiliteit van aandelen niet constant is in de tijd.

beweeglijkheid van een bepaald aandeel. Hoe meer de waarde van een aandeel in de loop van de tijd schommelt, hoe groter de volatiliteit. En hoe groter de volatiliteit, hoe groter het risico van een investering in dat aandeel. Stabiele beursfondsen zoals Unilever en Shell hebben een vrij lage volatiliteit. Aandelen die vaak en extreem bewegen hebben een hoge volatiliteit. De rente speelt een rol, omdat hoe hoger de rente, hoe aantrekkelijker het is om je geld op een spaarrekening te zetten in plaats van te beleggen in aandelen of opties.

Zowel de ontwikkeling van de rentestand als die van de volatiliteit zijn uiteraard niet van tevoren bekend, en moeten dus geschat worden. In het veel toegepaste Black-Scholes model uit 1973, worden zowel de rente als de volatiliteit constant verondersteld. Dat heeft als grote voordeel dat de optieprijs uitgedrukt kan worden in een formule die snel en relatief eenvoudig kan worden opgelost. Het Black-Scholes-model bevat twee termen. De eerste term is deterministisch, en heeft de rente als te schatten constante. De tweede term is stochastisch en heeft de volatiliteit als te schatten constante. De stochastische term is gemodelleerd met een zogeheten Wienerproces, in de natuurkunde ook wel bekend als Brownse beweging.



Het verloop van de rente – hier: de *London Interbank Offered Rate (LIBOR)* – in de periode juli 2000 tot december 2006 laat zien dat ook deze in de tijd varieert.

In werkelijkheid is echter noch de rente, noch de volatiliteit constant in de tijd. Dat maakt de deterministische term onzeker, en de stochastische term nog onzekerder. Het realistischere Heston-model uit 1993 gaat daarom een stap verder dan het Black-Scholesmodel door aan te nemen dat de volatiliteit willekeurig in de tijd varieert. De rentestand wordt wel nog steeds constant verondersteld. Het Heston-model blijkt in de praktijk vrij goed te werken op een termijn van jaren, maar niet zo goed voor een termijn van maanden.

Een realistische prijsformule

Elke bank gebruikt zijn eigen specifieke model, dat weer iets andere aannames doet over de toekomstige rentestand en volatiliteit dan de concurrenten. ING, maar ook andere banken, zoeken naar slimme oplossingsmethoden van een model waarin zowel de volatiliteit als de rentestand stochastisch variëren. De rentestand en de aandelenprijs mogen daarbij aan elkaar gecorreleerd zijn, zoals in werkelijkheid ook het geval is. “Theoretisch weten we goed met dit model te werken”, vertelt Antoine van der Ploeg van ING, “maar het probleem zit in het snel kunnen berekenen van call-optieprijsen in dit model. Veel optieproducten kun je niet met een simpele formule prijsen. Op papier zien de formules er eenvoudig uit, maar voor de oplossing hebben we numerieke technieken nodig die rekenintensief zijn.”

Uit een reeks van waargenomen call-opties op een dag – en dat kunnen er meer dan honderd zijn – probeert ING de parameters in het model te bepalen om de optieprijs van vandaag te berekenen. Dat levert de kalibratie van het model. Modellen worden dus dagelijks gekalibreerd. Van der Ploeg: “Gegeven die geschatte parameters kunnen we andere opties vervolgens daarmee prijsen. Dan staan de numerieke waarden van het model vast. De exotische optieprijsen kunnen we dan via simulatie of andere numerieke technieken bepalen.”

Momenteel wordt het model numeriek opgelost, maar dat kost veel tijd. Zo worden met een Monte-Carlo-methode een heleboel scenario's doorgerekend, en een gemiddelde bepaald van al die scenario's. Die aanpak werkt altijd, maar is duur, omdat er veel scenario's nodig zijn. Van der

Ploeg: “De vraag aan de studiegroep was nu of het mogelijk is om een semi-gesloten oplossing voor de prijsformule van een call-optie af te leiden. Als we een formule hebben voor de oplossing dan kunnen we in een fractie van een seconde wel de call-optieprijs berekenen. Dat versnelt het kalibratieproces – en daarmee het prijzen van exotische opties – aanzienlijk.”

De niche van de rekenkunst

Wat kan een groep van vijftien wiskundigen in een week toevoegen aan de expertise van een grote bank als ING, die zelf econometristen en wiskundigen in dienst heeft? Wiskundige Kees Oosterlee zat in de studiegroep, maar werkt ook in het dagelijkse leven op het terrein van de financiële wiskunde, bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam: “De niche in de financiële wiskunde is om econometristen en wiskundigen ook goed te laten rekenen. Je kunt wel mooie modellen opstellen, maar je moet ze ook oplossen, en dat is meer een ingenieursvaardigheid. Lang niet alle econometristen of wiskundigen zijn daar goed in getraind.”

Tijdens de studieweek splitsten de wiskundigen zich in drie groepen op. Een groep bestudeerde het probleem als een stochastische differentiaalvergelijking, en zocht naar een karakteristieke functie. Een tweede groep hanteerde partiële differentiaalvergelijkingen. De derde en laatste groep koos een tussenliggende aanpak. De laatste twee groepen hebben een eenvoudigere vorm van de afhankelijkheidsstructuur bekeken. De eerste groep, die zocht naar een karakteristieke functie binnen een stochastische aanpak, nam de minste vereenvoudigingen aan. “Het volledige probleem bleek in zijn meest algemene vorm te moeilijk om in een week op te lossen”, aldus Oosterlee. “En”, voegt hij er aan toe, “misschien wel om überhaupt analytisch op te lossen. Maar de drie aanpakken hebben toch interessante inzichten opgeleverd, gebaseerd op iets andere afhankelijkheidsstructuren. We denken dat ING daar toch snellere optieprijsen mee kan bepalen. De karakteristieke functie, die de eerste groep heeft afgeleid, zal denk ik het nuttigste zijn voor ING.”

De karakteristieke functie is weliswaar één functie, maar wel een bijzonder ingewikkelde. Het gaat om een Fourierbenadering van een

kansdichtheidsfunctie. “We hebben geprobeerd zoveel mogelijk analytisch te doen,” zegt Oosterlee, “maar het laatste stapje moet je toch numeriek oplossen. Volgens ons moet deze formule tot een snellere numerieke oplossing leiden. Die formule kan ING in principe implementeren in hun eigen software, die geheel gekoppeld is aan internationale bestanden met aandelen- en optieprijsen.”

Geen gesloten oplossing, toch meer inzicht

“Voor ons was het vooral een verkenning van wat wel en niet mogelijk is”, zegt Antoine van der Ploeg over de verwachtingen vooraf van ING.

“Wie weet zou het wat opleveren als je wiskundigen vanuit verschillende achtergronden naar het probleem laat kijken.”

Wat ING aan de resultaten van de studiegroep heeft, zal in de praktijk nog moeten blijken. Van der Ploeg: “Alle drie de groepen hebben de aanname gemaakt dat het renteproces onafhankelijk verloopt van het aandelenproces. Dat is een sterke aanname, die eigenlijk jammer is, omdat het aandelenproces in de praktijk wel degelijk gerelateerd is aan het renteproces. Het voordeel is echter dat je onder die aanname wel een semi-gesloten oplossing vindt, ook al is die minder realistisch. Het ziet er namelijk naar uit dat er helemaal geen semi-gesloten oplossing bestaat van het complete, meest realistische model, gegeven het rentemodel dat ons voor ogen staat. Dat is geen teleurstellend resultaat, maar eigenlijk een bevestiging van wat we al vermoedden. Het is goed om te zien dat wiskundigen vanuit verschillende achtergronden tot dezelfde conclusie komen.”

Toch gaat ING wel degelijk aan de slag met de gevonden resultaten.

Waar de handelsafdeling van ING snel de prijzen van opties aan klanten moet doorgeven, is de validatieafdeling voortdurend op zoek naar betere modellen en zwakheden in de huidige modellen. “Wij kijken altijd naar meerdere modellen in het systeem, omdat er tot op heden geen consensus bestaat over wat het beste model is. We moeten nog onderzoeken wat de invloed is van die sterke aanname op de uiteindelijke optieprijs. Het kan ook zijn dat het vereenvoudigende effect van de aanname best meevalt.”

Internetinformatie

www.ing.nl

http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/press.html

Nobelprijs Economie 1997 voor Myron Scholes en Robert Merton voor
“een nieuwe methode om de waarde van derivaten te bepalen”

(De Black-Scholes-methode).

(Overigens ging het bedrijf van Scholes en Merton, gebaseerd op hun
Nobelprijswinnende methode, twee jaar na het krijgen van de Nobelprijs
failliet...)

Meer gewas in gesloten kas

In een nieuw type tuinbouwkas kunnen warmte en koude ondergronds worden opgeslagen en hoeven de ramen nooit meer open. De vraag wordt dan hoe de tuinder de klimaatregeling in de kas zo efficiënt mogelijk kan regelen.

Een gewone tuinbouwkas heeft een simpele klimaatcontrole. Met de verwarmingsketel regel je de warmtetoevoer, en de koeling regel je door de ramen open of dicht te doen. Als het koud is, zijn de ramen dicht en staat de ketel aan. Als de zon gaat schijnen, gaat de ketel uit. Maar dan kan het al snel te warm worden in de kas, en moeten de ramen open. In een tuinbouwkas is eerder de koeling een probleem dan de verwarming. Een bijkomende complicatie is dat de plant water verdampt om zichzelf te koelen. Dat vocht hoopt zich in de kas op. Wordt de kas nu te vochtig, dan moeten de ramen open. Zo kan het gebeuren dat in een gewone kas zowel de verwarming aan moet – omdat het buiten koud is – als de ramen open – omdat de kas anders te vochtig wordt. Om de kas niet te vochtig te laten worden, verbruikt hij dus veel energie.

Adviesbureau Ecofys – gespecialiseerd in duurzame energie, energiebesparing en klimaatbeleid – vermoedde dat het energieverbruik van een kas efficiënter moest kunnen en bedacht het idee van een gesloten kas. Het basisidee is om de ramen voortdurend dicht te houden, en de warmte of koude niet weg te gooien, maar op te slaan en te gebruiken als het nodig is. Gebruik 's zomers de kou die je 's winters hebt opgeslagen en omgekeerd. Zo kunnen de ramen dicht blijven, wat als extra voordeel heeft dat de concentratie koolstofdioxide hoger wordt, waardoor de planten nog beter groeien. Zonlicht, temperatuur, vochtigheid en koolstofdioxidegehalte bepalen samen hoe de plant groeit.

De warmte wordt in de grond opgeslagen in een warmtebron, en de koude in een aparte koudebron. De bronnen liggen typisch enkele honderden meters uit elkaar en zijn zo'n honderd meter diep. In beide gevallen is de bron een aquifer: een poreuze zandlaag met daarin water, afgeschermd



Een inblik in een GeslotenKas® waarin tomatenplanten groeien in een goot op substraat. Daaronder lopen de luchtslangen die dienen om het kasklimaat te conditioneren. In de wanden van de slangen zitten gaten waardoor koude of warme lucht de kas wordt ingeblazen. Aan het begin van de slang (in de achtergrond op de foto) staan kasten met ventilatoren die de lucht in de slang blazen.

Credit: Innogrow

door een ondoordringbare kleilaag. 's Zomers kan er koud water uit de koudebron worden gepompt, en kan warm water in de warmtebron worden opgeslagen. 's Winters gaat het omgekeerd. Omdat de warmte-uitwisseling met de aquifers relatief langzaam verloopt, heeft de gesloten kas ook nog twee bovengrondse watertanks die snel warmte of koude kunnen leveren.

Het Nederlandse bedrijf Innogrow is net als Ecofys een dochter van Econcern. Innogrow ontwikkelt nu het idee verder tot een nieuw type tuinbouwkas voor de teelt van gewassen: de GeslotenKas®. Een model van de GeslotenKas bestaat uit vier belangrijke componenten: de plant (waarvoor een biologisch model wordt gebruikt); het klimaat in de kas (afhankelijk van de interne klimaatregulering maar ook van het weer); de energievoorziening (productie van warmte en koude en elektriciteit); en tenslotte de kosten en de opbrengsten (een economisch model). Een aantal van deze kassen is al verkocht en gebouwd.

Energieverbruik minimaliseren

De vier componenten van de kas moeten nu zo op elkaar zijn afgestemd dat het gewas tegen zo min mogelijk kosten zoveel mogelijk geld op de markt opbrengt. Innogrow wil graag weten hoe de GeslotenKas geoptimaliseerd kan worden en legde dit probleem voor aan de studiegroep.

Wiskundige Jaap Molenaar van de Wageningen Universiteit: “De vraag is gemakkelijk te stellen, maar we hebben lang gediscussieerd over wat je precies wilt en kunt optimaliseren. In het probleem zitten namelijk veel moeilijk grijpbare factoren. De prijs van gas en elektriciteit bijvoorbeeld. Die wordt bepaald door het energiebedrijf. Bij een andere prijs krijg je ongetwijfeld een andere optimale oplossing. Maar ook de prijs van de tomaten of de sla op de markt speelt een rol. Je kunt wel veel tomaten produceren, maar als op dat moment de prijs laag is, schiet het nog niet op met je omzet. En wat doe je met de verwachte hoeveelheid zonneschijn?”

In overleg met Innogrow koos de studiegroep uiteindelijk voor het optimaliseren van het energieverbruik. Lou Ramaekers van Innogrow: “Het deelprobleem wordt dan om de gebruikte energie te minimaliseren, gegeven dat de tuinder weet welk klimaat hij in de kas moet aanleggen, en gegeven de energieprijzen. Wij hadden zelf wel eens wat gerekend met een genetisch algoritme, maar dat werd al snel erg bewerkelijk. Wij hoopten dat de studiegroep een slimmere oplossing zou bedenken.”

Lineair programmeren

De studiegroep stortte zich vervolgens op het minimaliseren van de verbruikte energie voor een gemiddeld jaar. Innogrow heeft gegevens over hoeveel zonneshij er gemiddeld is te verwachten op elk uur van de dag in dat gemiddelde jaar. De input die de wiskundigen gebruikten, bestaat uit de gemiddelde hoeveelheid zonneshij per uur en de geschatte prijzen van gas en elektriciteit per uur.

Molenaar: “Het probleem blijkt vervelende randvoorwaarden te hebben. Zo moeten de aquifers na een jaar net zoveel warmte en koude hebben afgegeven als opgenomen. Anders zou het systeem de grond opwarmen of afkoelen en dat is wettelijk niet toegestaan. En zowel de boven- als ondergrondse vaten hebben een beperkte capaciteit. Datzelfde geldt voor de warmtepompen en de boilers. Nog lastiger wordt het met een speciaal soort boiler, die *Combined Heat Power* heet. Deze werkt op gas, en genereert behalve warmte ook elektriciteit. En die elektriciteit kun je in de kas weer gebruiken, maar je kunt hem ook aan het energiebedrijf leveren tegen een prijs die het energiebedrijf bepaalt. Dan moet je gaan uitrekenen wat financieel het meeste opbrengt: zelf gebruiken in de kas, of terugverkopen aan het energiebedrijf. Dat zorgt voor lastige terugkoppelingen in het systeem. Alle randcondities samen bepalen wat wel en niet kan.”

Het wiskundige model voor het energieverbruik van de GeslotenKas is nu een reeks van energievergelijkingen die bepaald wordt doordat op elk knooppunt in het netwerk evenveel energie in moet komen als er uit gaat. De beperkte capaciteiten van pompen en reservoirs vormen de randvoorwaarden. Zo ontstaat een stelsel van vijftien energiebehoudsvergelijkingen, met vijftien randvoorwaarden. Molenaar: “De toestand van de GeslotenKas wordt op elk uur beschreven door een toestandsvector van ongeveer dertig componenten: bijvoorbeeld hoe vol is een reservoir, wat zijn de warmte- of koudestromen in een verbindingspijp en wat is de energiebehoefte op dat uur? Vervolgens moet je op elk uur in een jaar die componenten zodanig kiezen dat de energiekosten voor het gehele jaar zo laag mogelijk zijn. Dit optimalisatieprobleem heeft dus zo’n $365 \times 24 \times 30 = 262.800$ onbekenden.”

De grote stap voorwaarts is volgens Molenaar behaald doordat de vergelijkingen en de te optimaliseren functie lineair zijn gemaakt in de toestandsvector. Daardoor wordt het probleem zelfs voor een periode van een heel jaar behapbaar. De wiskundigen pakten standaard software op het terrein van het lineair programmeren uit de kast en brachten het model precies in de juiste vorm voor het softwarepakket.

“Voor het doorrekenen van een heel jaar, ontbrak ons de tijd”, zegt Molenaar “maar met de methode die er nu ligt, kan Innogrow dat zelf doen. Daaruit volgt dan hoe ze de regeling voor een gemiddeld jaar moeten instellen en daaruit volgen waarschijnlijk ook adviezen over de capaciteiten van reservoirs en pompen. Een echt jaar wijkt uiteraard af van het gemiddelde jaar dat wij als invoer hebben gekozen, maar je kunt je voorstellen dat de tuinder in de praktijk een beetje om de optimalisatie voor een gemiddeld jaar heen regelt – een soort fijnafstemming dus.”

Hoe niet-lineair is het probleem?

Wat Innogrow concreet aan de resultaten heeft, is volgens Lou Ramaekers van het bedrijf nog onduidelijk. “Ik vind het interessant wat er is uitgekomen, maar er zitten ook veel benaderingen in. Het is een allereerste begin. Om echt te weten wat deze aanpak oplevert, hebben we toch de berekeningen voor een heel jaar nodig, en daar gaan we nog verder naar kijken.”

De studiegroep concentreerde zich nu op het energieverbruik omdat het probleem anders te ingewikkeld werd om in een week aan te pakken. “Door alleen naar de energie te kijken, kon het probleem gelineariseerd worden”, vertelt Ramaekers. “In werkelijkheid werk je met waterstromen en temperaturen, en die twee vermenigvuldig je met elkaar om de energie-inhoud te berekenen. Ze zijn onafhankelijk van elkaar. Een waterstroom varieert continu. En de temperatuur bepaalt niet alleen hoeveel energie het water met zich meedraagt, maar ook hoe efficiënt een apparaat in het systeem werkt. De watertemperatuur bepaalt bijvoorbeeld mede het rendement van een warmtepomp. Dat is een belangrijke ontwerpfactor en zo ontstaat een niet-lineair probleem. Het kan zijn dat de linearisatie voor het optimaliseren van het probleem toch een verantwoorde aanname is, maar dat moeten we verder onderzoeken.”

Internetinformatie

www.innogrow.nl

Slimme inzet van KLM-reservecrew

Als KLM-crewleden door ziekte, vertraging of schemawisselingen niet op een ingeroosterde vlucht kunnen werken, moeten er reservecrewleden klaar staan om in te vallen. Daarbij staat de KLM voor de vraag wat de optimale manier is om reservecrewleden in te roosteren. Die planning gebeurt nu nog op grond van de ervaring van de crewplanners en crewcontrollers, maar KLM wil graag weten of een wiskundig model de reservestelling verder kan optimaliseren.

KLM heeft meer dan honderd vliegtuigen en meer dan achtduizend cabinepersoneelsleden. Elke week starten circa 3500 cabineleden aan een nieuwe roosteropdracht, bestaande uit één intercontinentale vlucht of een aaneenschakeling van vluchten binnen Europa. KLM publiceert wekelijks een nieuw rooster voor het cabinepersoneel. In dat rooster kan het cabinelid zijn of haar indeling voor de twee komende weken zien. De vluchtoperdachten in deze indeling bestaan veelal uit een aantal routedagen (waarop de cabinebemanning vliegt of op een buitenstation verblijft), gevolgd door een aantal dagen reisverlof. Parttime crew krijgt aansluitend nog deeltijdverlof.

Bij het samenstellen van het rooster moet ook rekening worden gehouden met de rangen van het cabinepersoneel en met de vliegtuigtypen waarvoor een personeelslid is gekwalificeerd. Het KLM-cabinepersoneel kent vier rangen: de *senior purser*, de *purser*, de *business class flight attendant* en de *economy class flight attendant*. De eerste twee vervullen de rol van managers aan boord. In het algemeen werken er alleen pusers en economy flight attendants op Europese vluchten. Op intercontinentale vluchten wordt personeel van alle vier de rangen ingezet.

De KLM opereert met vijf verschillende vliegtuigtypen: Boeing 737, 747 en 777, Airbus 330 en M11 (de toestellen F50, F70 en F100 van KLM Cityhopper niet meegerekend). Elk type toestel heeft zijn eigen kenmerken, die een bemanningslid volledig moet kennen. Om gekwalificeerd te blijven voor een bepaald type, moet een personeelslid een minimaal aantal vluchten per jaar in dat type vliegen. De meeste cabineleden zijn gekwalificeerd voor drie verschillende vliegtuigtypen.

Het opgestelde rooster kan op verschillende manieren verstoord worden. Dat kan door interne oorzaken, zoals ziekte of andersoortige uitval van een bemanningslid. Dat kan ook om externe redenen, zoals een vertraagde vlucht, of een vervanging van een vliegtuigtype door een ander type, wat ook geregeld voorkomt als bijvoorbeeld het aantal passagiers te klein is, of juist groter dan verwacht.



De pурсervoorbereidingsruimte van KLM

Credit: KLM

De KLM moet deze verstoringen uiteraard zien op te vangen. In overleg tussen de planners en crewcontrollers wordt aan het begin van een seizoen bepaald hoeveel reserves per dag beschikbaar moeten zijn. Daarin bepalend is ook de dienstregeling. Er moeten namelijk voldoende reserves zijn om

verstoringen gedurende de hele dag en op alle types te kunnen opvangen. Zo zijn er vroege en late reservediensten en reservediensten voor crew met verschillende typekwalificaties.

De reserveplanning gebeurt nu nog grotendeels op grond van ervaring. Vanaf twee weken vóór de dag van uitvoering heeft de afdeling Crew Control de beschikking over de ingedeelde reservecrew. Een crewlid krijgt jaarlijks een aantal keren een reserveblok ingedeeld. Nu bestaat een reserveblok typisch uit een dag of vijf paraat zijn om als reserve in te vallen, waarna er twee vrije dagen volgen. Als een reservelid moet invallen, dan neemt deze een volledige vluchtopdracht (routedagen + reisverlofdagen) over van het oorspronkelijk ingeroosterde bemanningslid.

Domino-effect

Als een reservelid echter bijvoorbeeld op de vijfde dag pas moet invallen, dan moet hij zelf verstek laten gaan bij het volgende reguliere blok waarvoor hij stond ingepland. Zo ontstaat een secundaire verstoring. Daarna kan er in het ergste geval zelfs een domino-effect ontstaan waarbij diverse reserveleden elkaars verstoring opvangen. Dit werkt verstorend in de operatie en is onaangenaam voor de crewleden, omdat ze zo niet goed weten hoe hun vervolgrooster er uit zal zien.

In principe kan een langere reserveperiode zo'n domino-effect voorkomen. Stel dat iemand drie weken reserve kan staan in plaats van vijf dagen, dan is de kans veel kleiner dat het reservelid zelf moet afzeggen voor zijn volgende dienst na afloop van die drie weken. Maar als crewleden drie weken achter elkaar reserve staan, is dat wellicht ook niet fijn voor de crew. Bovendien moet een stijging van de kosten worden voorkomen. Het is onwenselijk voor zowel de crew als de KLM om iemand zo lang achter elkaar reserve te laten staan als er binnen het blok ook veel dagen zullen zijn waarop het reservelid niet werkt. De huidige lengte van een reserveblok (zeven dagen waarvan vijf reservedienst) is vanwege het domino-effect misschien niet de beste keuze. Het aantal reserveblokken dat dagelijks wordt ingedeeld is gebaseerd op jarenlange ervaring maar kan misschien nog verder geoptimaliseerd worden. Zou de wiskunde niet een betere oplossing kunnen berekenen?

“De uitdaging waar de KLM voor staat,” vertelt Marc Paelinck van KLM, “is de optimaliseringsvraag om bij een gegeven dienstregeling te bepalen *hoeveel* mensen er op een dag reserve moeten staan, en *hoe lang* iemand reserve moet staan. Daarnaast is de vraag welke achthuursperiode op een bepaalde dag het reservelid paraat moet staan. Want vanwege arbeidswetgeving heeft het geen zin om een reservelid langer dan acht uur achter elkaar reserve te laten staan: omdat de reservedienst wettelijk als werktijd gerekend wordt, mag een crewlid na acht uur reserve nog maar een beperkt aantal uren vliegen. De vraag is dan in welke perioden van een dag de meeste verstoringen zijn te verwachten. In die perioden moeten dan de meeste reserveleden klaar staan. Aan de andere kant kunnen verstoringen op elk moment van de dag voorkomen, en dus moeten er altijd wel enkele reserves klaar staan om in te vallen. Deze optimaliseringsvragen hebben we aan de studiegroep voorgelegd.”

Arbeidsinspectie

Marco Bijvank zat als wiskundige in de studiegroep, en hij legt uit hoe lastig het probleem is te modelleren: “We hebben er een hele tijd over gedaan om een goede definitie van het probleem te bepalen. Het was moeilijk om duidelijk te krijgen wat we als gegeven mogen opvatten en wat niet. De wiskunde kan wel een bepaalde oplossing aangeven, maar als die oplossing vervolgens niet mag van de arbeidsinspectie, dan heb je er nog niets aan.”

Drie criteria bepalen nu de kwaliteit van een reservestrategie: het aantal secundaire verstoringen, het aantal ongebruikte reservedagen en het aantal open dagen dat er ligt tussen het einde van een reservedienst en het begin van de volgende reguliere dienst. De laatste twee zijn aan elkaar gerelateerd. Hoe kleiner elk van deze drie, hoe beter de reservestrategie.

Om het probleem te vereenvoudigen, namen de wiskundigen aan dat elk crewlid in elk type vliegtuig mag werken, dat er geen verschillen in rangen zijn en dat alle crewleden fulltime werken. Verder gebruikten ze de KLM-gegevens over de kans waarmee interne en externe verstoringen het reguliere rooster in de war schoppen. Bijvank: “We zijn uitgegaan van een gegeven rooster dat zegt hoeveel mensen op een bepaalde dag op vluchten worden ingezet. Daarbovenop hebben we een stochastisch proces van verstoringen gedefinieerd.”

Het basisidee dat de wiskundigen vervolgens gebruikten modelleert de bemanningsleden die uitvallen als een *workforce out-flow* en de bemanningsleden die na een verstoring weer terugkeren als een *workforce in-flow*. Op de lange termijn is de *workforce out-flow* ongeveer gelijk aan de *workforce in-flow*. Maar op elk individueel tijdstip zijn ze met elkaar in onbalans, wat moet worden opgevangen met een reservestrategie. De tactiek is nu om de uitgevallen crewleden zo snel mogelijk weer te laten terugkeren naar het oorspronkelijke rooster. Dat werd namelijk beschouwd als optimaal.

Bijvank: "Uitgaande van het stochastische proces van verstoringen hebben we met een statistische methode bepaald hoeveel reservecrewleden er op een bepaalde dag nodig zijn, en hoeveel dagen een reserveblok moet duren. De eerste resultaten laten zien dat de huidige strategie van vijf dagen reserve staan en twee dagen vrij weliswaar tamelijk goed werkt voor vluchten binnen Europa, maar niet goed voor de lange, intercontinentale vluchten. In het tweede geval ontstaan er immers secundaire verstoringen. Om verstoringen op lange vluchten goed op te vangen, zijn er ook reserveblokken van een langere lengte nodig dan nu gebeurt. Maar aan de andere kant moet je ook weer niet te veel van dat soort blokken inroosteren. Voor het berekenen van meer gedetailleerde resultaten hadden we nog numerieke simulaties willen uitvoeren, maar daar hebben we uiteindelijk geen tijd meer voor gehad."

"De studieweek heeft veel inzicht opgeleverd over het spel van het domino-effect", zegt Marc Paelinck, "maar er was onvoldoende tijd om volledig uitgewerkte voorstellen voor verbetering te maken."

De studiegroep heeft het onderzoek echter na de week voortgezet en is er in geslaagd om een model te ontwikkelen dat de oorspronkelijke vragen kan beantwoorden. Dit model gaat uit van de stochastische aard achter de uitval van crewleden. De kans dat een bepaald aantal reservecrewleden nodig is, wordt vergeleken met een gegeven reserverooster. Op deze manier kan achterhaald worden hoeveel reserveshifts van een bepaalde lengte nodig zijn op een dag.

Minder verstoringen in MRI-beelden

MRI-scanners gebruiken steeds hogere magneetvelden. In principe moet dat tot gedetailleerdere beelden leiden, maar in de praktijk treden er beeldverstoringen op als gevolg van een interactie tussen het elektromagnetische veld en het menselijk lichaam. Wiskundigen zoeken naar een manier om die storingen te voorkomen door de scanner anders in te stellen.

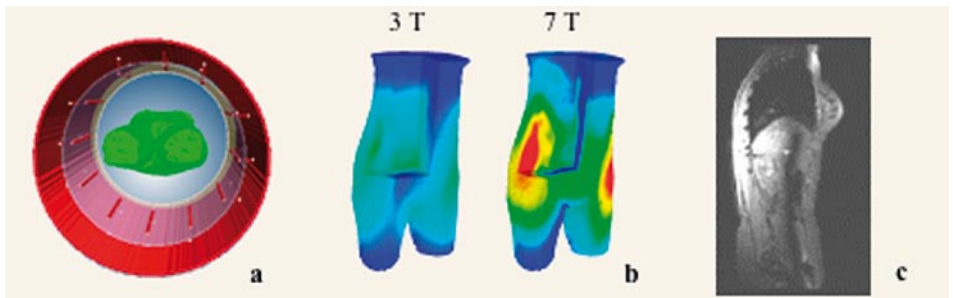
Voor het opsporen en in kaart brengen van tumoren in de baarmoederhals of in de prostaat gebruikt de afdeling radiotherapie van het Universitair Medisch Centrum Utrecht (UMCU) een MRI-scanner. Een MRI-scanner gebruikt een sterk magneetveld om de waterstofatomen in het lichaam langs dit externe veld te richten. Het menselijk lichaam zit vol met waterstofatomen, die allemaal als kleine magneetjes werken.

Met radiogolven kan de MRI-scanner het lichaam vervolgens aftasten. De waterstofatomen in het lichaam absorberen de energie van de radiogolven en worden zo tijdelijk in een andere richting gedwongen. Vervolgens klappen de waterstofatomen weer terug naar hun oorspronkelijke oriëntatie en daarbij zenden ze zelf radiogolven uit. De MRI-scanner meet deze golven. De sterkte en frequentie van de uitgezonden golven geeft gedetailleerde informatie over de structuur en samenstelling van het weefsel in het lichaam. Een MRI-beeld laat die verschillen in weefselstructuur en -samenstelling zien. Op die manier moeten artsen tumoren onderscheiden van gezond weefsel.

Het UMCU beschikt over MRI-scanners met een magneetveld van 1,5 tesla (tegenwoordig dé standaard in ziekenhuizen), en eentje van 3 tesla. Spoedig schaft het ziekenhuis zelfs een 7-tesla-scanner aan. Dat zijn magneetveldsterktes die tienduizenden malen hoger zijn dan die van het aardmagnetisch veld. Een sterker magneetveld betekent in theorie een betere verhouding tussen beeldcontrast en ruis, en dus kan de scanner in principe meer zien. Maar er zit een adder onder het gras. Hoe hoger het magneetveld, hoe meer je je best moet doen daar profijt uit te trekken. Het gemeten signaal dooft sneller uit en je moet langer wachten tussen

verschillende experimenten. Hoe sterker het magneetveld, hoe hoger ook de frequentie van de radiogolven waarmee je de waterstofatomen moet aanslaan: 64 megahertz bij een magneetveld van 1,5 tesla; 128 megahertz bij 3 tesla en 300 megahertz bij 7 tesla.

Met die toenemende frequentie, neemt de golflengte af en dat wordt een probleem als de golflengte van de orde grootte van de afmetingen van de patiënt of kleiner wordt. Bij een magneetveld van drie tesla, en in nog sterkere mate bij zeven tesla, zorgt de interactie tussen de golven en het menselijk lichaam voor serieuze verstoringen in het beeld. Er ontstaan staande golven die op sommige plekken voor veel signaal en op andere plekken voor weinig signaal zorgen. In het MRI-beeld ontstaan dan ofwel geheel zwarte vlekken, ofwel geheel witte vlekken, zonder informatie over de weefselstructuur. Een ander nadeel is dat de radiogolven zorgen voor een opwarming van het menselijk lichaam. En hoe hoger de frequentie, hoe meer energie er in die golven zit, en hoe groter de opwarming.



a) In een MRI-scanner is de patiënt omringd door antennes die radiogolven uitzenden.

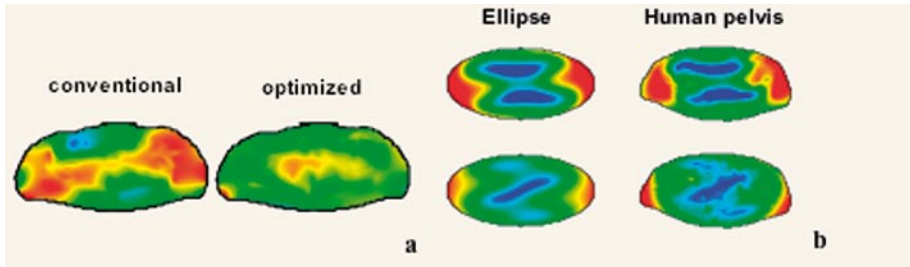
b) De inhomogeniteit van het RF-veld dat de antennes opwekken wordt bij een magneetveld van 7 tesla een serieus probleem.

c) Door interferentie levert het MRI-beeld bij 7 tesla op sommige plaatsen een zwart beeld.

Patiënt als ellips

“We staan voor twee uitdagingen”, vertelt Nico van den Berg van het UMCU. “De eerste is om de beeldkwaliteit te verbeteren. De tweede is om die opwarming binnen de perken te houden.”

Het probleem dat het UMCU voorlegde aan de studiegroep richt zich op het buik- en bekkengebied. Het globale patroon van het elektromagnetische veld in dit gebied wordt bepaald door een combinatie van de geometrie van het gebied en de mate waarin weefsels het elektromagnetische veld toelaten: de diëlektrische eigenschappen van bijvoorbeeld vetweefsel, spierweefsel of botweefsel. Voor de eenvoud



a) Door de amplitude en de fase van het RF-veld van de individuele antennes te variëren, kan het MRI-beeld verbeterd worden.

b) De doorsnede van het bekkengedeelte van het menselijk lichaam kan in goede benadering als een ellips worden beschouwd

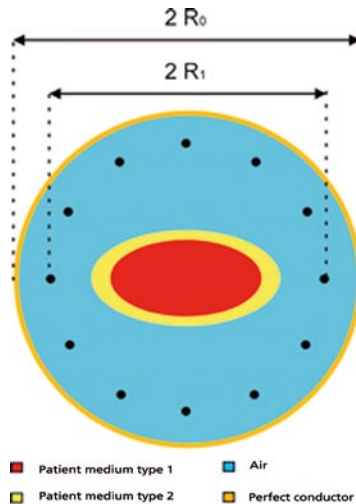
wordt er een ellipsvormige wand aangenomen met de diëlektrische eigenschappen van vetweefsel, en een ellipsvormig binnenste met overall dezelfde diëlektrische eigenschappen, gebaseerd op een soort gewogen gemiddelde van alle verschillende weefsels in het inwendige van de patiënt. Het probleem is tweedimensionaal.

“De opdracht voor de wiskundigen was nu”, vertelt van den Berg, “om het elektromagnetische veldpatroon in de patiënt te optimaliseren. Optimaliseren betekent in dit verband dat het veld zo homogeen mogelijk moet zijn en tot zo min mogelijk opwarming van menselijk weefsel moet leiden. Dat kun je proberen te doen door de fase en de amplitude te variëren van de radiogolven die elke antenne uitzendt. Daarmee verander je de interferentie van al die radiogolven in de patiënt.”

In de toekomst moet zo'n optimalisatieprogramma geïntegreerd worden in de MRI-scanner. Het scenario is dan als volgt: de patiënt gaat in de MRI-scanner liggen en de scanner berekent eerst de beste 'fitting ellips'. Een dikke patiënt zal een dikkere buikwand hebben dan een dunne patiënt,

en dat levert een andere interactie tussen het elektromagnetische veld en het lichaam. Als de geometrie bekend is, berekent een model wat de beste fase- en amplitude-instellingen zijn van de antennes om zo min mogelijk beeldverstoreningen te krijgen en zo min mogelijk weefselopwarming. De scannerinstelling wordt dus per patiënt geoptimaliseerd.

“Het kost ons iets van twee uur om de numerieke modellen die we nu hebben op te lossen”, zegt van den Berg. “Dat is in de praktijk niet werkzaam, omdat de patiënt dan veel te lang in de scanner zou moeten liggen. We hebben de wiskundegroep daarom gevraagd te zoeken naar een model dat wel een snelle oplossing levert voor hoe we de antennes moeten instellen voor een optimaal beeld. En met snel bedoel ik een oplossing binnen een of twee minuten. We hadden een sterke voorkeur



Het model dat gebruikt wordt om de interactie tussen de radiogolven en het lichaam te beperken, berekent het elektromagnetische veld in deze geometrie: (1) een cirkelvormig koperschild (een perfecte geleider) ligt om het eigenlijke experiment heen en schermt verstorende elektromagnetische invloeden van buiten af (2) een ellips bestaande uit twee elliptische lagen, elk met zijn eigen diëlektrische eigenschappen, staat model voor een doorsnede van het menselijk lichaam: de buikwand en het inwendige (3) de patiënt is omringd door N gelijk verdeelde antennes.

voor een analytisch model, omdat je dan ook de afhankelijkheid tussen alle parameters in kaart hebt gebracht. Een analytisch model geeft meestal meer inzicht dan een numeriek model.”

De clou zit in de Besselfuncties

De wiskundigen stonden nu voor de taak om de Maxwellvergelijkingen – differentiaalvergelijkingen die het gedrag van een elektromagnetisch veld beschrijven – op te lossen binnen een holle cilinder (de MRI-scanner) met daarin een ellipsvormige patiënt. De patiënt bestaat in goede benadering uit twee gebieden: een buikwand, die wat vetter is, en een binnenste met vlees, spier en bot.

“Het grootste probleem”, vertelt wiskundige Rogier Swierstra van de studiegroep, “zit in wat er met de oplossingen van de Maxwellvergelijkingen bij de drie randen gebeurt: van het binnenste van de patiënt naar de buikwand, van de buikwand naar de lucht, en van de lucht naar het buitengebied van de scanner. We hebben het probleem aangepakt voor één antenne. Ons idee was dat het UMCU met de analytische beschrijving van hoe het met één antenne gaat de rekentijd al tot enkele seconden kan verkorten. Als je weet wat één antenne doet, kun je daarna gemakkelijk de bijdragen van een reeks antennes bij elkaar optellen en de totale bijdrage optimaliseren.”

De oplossingen van de Maxwellvergelijkingen laten zich in het algemeen formuleren als een som van verschillende functies van een bepaalde soort. Welk type functie handig is, hangt af van de geometrie van het probleem. De studiegroep onderzocht twee aanpakken. In de eerste aanpak werd de oplossing uitgeschreven als een som van Besselfuncties. Dat zijn functies die handig zijn bij ronde geometrieën. Voor dit probleem lijkt dat handig rondom de antenne, maar minder handig in en om de ellipsvormige buik. Daarom onderzocht een tweede groep een oplossing die uitgeschreven werd in een som van Mathieufuncties. Deze functies zijn handig bij elliptische geometrieën. Voor dit probleem is dat geschikt in en om de buik, maar minder geschikt nabij de antennes.

Swierstra: “Besselfuncties leveren voor dit probleem meer complicaties op aan de randen dan Mathieufuncties. Maar Mathieufuncties doen het rond

de antennes weer slechter dan Besselfuncties. Bovendien bestaat er voor Besselfuncties veel meer numerieke software dan voor Mathieufuncties. Beide groepen hebben een oplossing gevonden, maar uiteindelijk bleek een oplossing in Besselfuncties in de praktijk beter te werken. Het in een programma implementeren van Mathieufuncties duurde te lang.”

Na afloop van de studieweek hebben enkele wiskundigen nog verder gewerkt aan het probleem. Op basis van de oplossing met Besselfuncties hebben ze toen een optimalisatieprogramma gemaakt dat in minder dan twee minuten rekenen – op een gewone desktop computer – bepaalt hoe de amplitude en frequentie van de antennes geregeld moet worden om het veld in de buik te homogeniseren.

Praktijktest

“Het lijkt erop dat we de resultaten kunnen gebruiken”, blik van den Berg terug op de resultaten van de studiegroep. “Het model kunnen we binnen een paar minuten oplossen, en dat is wat we zochten. Samen met Philips Research gaan we later dit jaar testen hoe goed deze methode in de praktijk werkt.”

Ook heeft de semi-analytische oplossing enkele nieuwe inzichten opgeleverd. “We kunnen in de formules expliciet zien wat het effect is van bijvoorbeeld een overgang van vetweefsel naar spierweefsel voor de verdeling van het elektromagnetische veld. En ook hoe dat veld verandert als bijvoorbeeld de vetlaag dikker is. Daarnaast zien we de resonantiefrequenties van de radiogolven van de MRI-scanner keihard terug in de oplossing. Dat inzicht kunnen we gebruiken om die resonantiefrequentie af te stemmen op de resonantiefrequentie van de waterstofkernen. Op die manier kunnen we een beter beeld krijgen.”

“Ik ben zelf een fysicus”, zegt van den Berg. “Voor mij was het verfrissend om met wiskundigen samen te werken, omdat zij vanuit een ander perspectief naar hetzelfde probleem kijken. Dat leverde interessante discussies. Ik ben als fysicus bijvoorbeeld gewend om het probleem eerst te schetsen in termen van de geometrie, de typische afstanden en de gebruikte frequenties. Toen ik die informatie op het bord schetste, vroegen de wiskundigen meteen om de Maxwellvergelijkingen op te schrijven. Want die staan voor hen aan de basis van de oplossing.”

