

Berekeningen bij het commentaar op Kort klaar...
van Ludolph van Ceulen
www.wiskonst.nl

Erik van Werkhoven

27 september 2005

1 De zijde DC van een ingeschreven 12 hoek

We weten al dat $DC = \sqrt{32 - 8\sqrt{12}}$. Nu kunnen we een techniek gebruiken die Van Ceulen ook gebruikte in *De Arithmetische en Geometrische Fundamenten*[1]. Namelijk dat voor $a, b \in \mathbb{Q}$ en $\epsilon = \pm 1$ geldt:

$$\sqrt{\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a-b} + \epsilon\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{a-b})}}$$

Als je die regel toepast krijg je

$$\begin{aligned} DC &= \sqrt{32 - 8\sqrt{12}} = \sqrt{\sqrt{1024} - \sqrt{768}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(32 + \sqrt{256})} - \sqrt{\frac{1}{2}(32 - \sqrt{256})} \end{aligned}$$

2 De zijde EC van een ingeschreven 24 hoek

$$EC^2 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{24} - \sqrt{8})\right)^2 + \left(4 - \sqrt{8 + \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8}}\right)^2 \quad (2.1)$$

$$= \frac{1}{4}(24 + 8 - 2\sqrt{24}\sqrt{8}) + \left(16 + 8 + \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8} - 8\sqrt{8 + \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8}}\right) \quad (2.2)$$

$$= 8 - \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8} + 24 + \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8} - 8\sqrt{8 + \frac{1}{2}\sqrt{24}\sqrt{8}} \quad (2.3)$$

$$= 32 - 8\sqrt{8 + \frac{1}{2}\sqrt{192}} = 32 - 8\sqrt{8 + \sqrt{48}} \quad (2.4)$$

$$= 32 - \sqrt{64}\sqrt{8 + \sqrt{48}} = 32 - \sqrt{64(\sqrt{64} - \sqrt{48})} \quad (2.5)$$

$$= 32 - \sqrt{\sqrt{4096}(\sqrt{64} - \sqrt{48})} \quad (2.6)$$

$$32 - \sqrt{\sqrt{262144} + \sqrt{196608}} \quad (2.7)$$

$$32 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}(512 + 256)} + \sqrt{\frac{1}{2}(512 - 256)}\right) \quad (2.8)$$

$$= 32 - \sqrt{384} - \sqrt{128} \quad (2.9)$$

dus uiteindelijk is

$$EC = \sqrt{32 - \sqrt{384} - \sqrt{128}} \quad (2.10)$$

In de editie van *Cort klaar bewijs...* uit 1585 heeft Ludolph van Ceulen $EC = \sqrt{32 - \sqrt{384} + \sqrt{128}}$, dus is de laatste min per ongeluk in een + veranderd.

Bij de stap van 2.7 naar 2.8 heb ik weer gebruikt dat voor $a, b \in Q$ en $\epsilon = \pm 1$ geldt:

$$\sqrt{\sqrt{a} + \epsilon\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a-b})} + \epsilon\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{a-b})}$$

3 De zijde FC van een ingeschreven 48 hoek

Omdat de berekening van de zijdes van figuren met meer hoeken al gauw erg veel rekenwerk oplevert, heb ik een computer gebruikt om de andere zijdes algebraïsch te berekenen. Op die manier vind ik

$$FC = 2\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}}$$

Voor de volledigheid hier een afdruk van de gebruikte Maple sheet:

```
> FP_24:=sqrt( 32-sqrt(384)-sqrt(128) );

FP_(24) := 2 sqrt(8 - 2 sqrt(6) - 2 \sqrt(2))

> FP_48:=(1/2)*FP_24;

FP_48 := sqrt(8 - 2 sqrt(6) - 2 sqrt(2))

> AP2_48:=16-(FP_48)^2;

AP2_48 := 8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)

> AP_48:=sqrt(AP2_48);

AP_48 := sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

> CP_48:=4-AP_48;
```

```

CP_48 := 4 - sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

> FC2:=(FP_48)^2+(CP_48)^2;

FC2 := 8 - 2 sqrt(6) - 2 sqrt(2)

      2
+ (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> FC:=sqrt(FC2);

FC := sqrt(8 - 2 sqrt(6) - 2 sqrt(2)

      2
+ (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))

> simplify(FC);

2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2)))

> evalf(FC);

0.5232250342

> FC_Ceulen:=sqrt(32-sqrt(512+sqrt(98304)+sqrt(32768) ) );

FC_Ceulen := 2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> simplify(FC_Ceulen);

2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2)))

> evalf(FC_Ceulen);

0.5232250376

>

```

4 De zijde GC van een ingeschreven 96 hoek

Op dezelfde manier vind ik voor GC

$$\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}} + \left(4 - \sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}}\right)^2}$$

Wat gelijk is aan

$$\sqrt{32 - \sqrt{512 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}}}$$

Terwijl Van Ceulen schrijft

$$\sqrt{32 - \sqrt{512 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}}}$$

De Maple sheet:

```
> GP_48:=sqrt(32-sqrt(512+sqrt(98304)+sqrt(32768) ) ) ;

GP_48 := 2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> GP_96:=(1/2)*GP_48;

GP_96 := sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> AP2_96:=16-(GP_96)^2;

AP2_96 := 8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

> AP_96:=sqrt(AP2_96);

AP_96 := sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> CP_96:=4-AP_96;

CP_96 := 4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))

> GC2:=(GP_96)^2+(CP_96)^2;

GC2 := 8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))
```

```

      2
      + (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))
> GC:=sqrt(GC2);

GC := sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

      2
      + (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))) )
> simplify(GC);

2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2))))
> evalf(GC);

0.2617526645

> GC_Ceulen:=sqrt( 32-sqrt(512)+sqrt( 131072+sqrt(6442450944)
+sqrt(2417483648) ) );

GC_Ceulen := sqrt(32 - 16 sqrt(2)

      + 2 sqrt(32768 + 8192 sqrt(6) + 2 sqrt(37773182)))
> simplify(GC_Ceulen);

sqrt(32 - 16 sqrt(2) + 2

      sqrt(32768 + 8192 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2) sqrt(18886591)))
> evalf(GC_Ceulen);

22.79844916

> GC_Ceulen_goed:=sqrt( 32-sqrt(512+sqrt( 131072+sqrt(6442450944)
+sqrt(2147483648) ) ) );

GC_Ceulen_goed := 2 (8 - 2 (8 + 2 (8 + 2 61/2 + 2 21/2 ) ) )1/2

```

```
> #deze waarde geeft Van Ceulen in proefsteen
> (simplify(GC_Ceulen_goed));
```

$$2 \left(8 - 2 \left(8 + 2 \left(8 + 2 \sqrt[1/2]{2} \sqrt[1/2]{3} + 2 \sqrt[1/2]{2} \sqrt[1/2]{2} \right) \right) \right)$$

```
> evalf((GC_Ceulen_goed));
```

0.2617526618

```
>
```

5 De zijde HC van een ingeschreven 192 hoek

Op dezelfde manier vind ik voor HC

$$2\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}}}}$$

En dat komt overeen met Van Ceulens waarde.

$$2\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}}}}$$

De Maple sheet:

```
> HP_96 := sqrt(8-2*sqrt(8+2*sqrt(6)+
2*sqrt(2)) + (4-sqrt(8+2*sqrt(8+2*sqrt(6)
+2*sqrt(2))))^2);
```

```
HP_96 := sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))
```

```
+ (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))^2)
```

```
> HP_192:=(1/2)*HP_96;
```

```
HP_192 := 1/2 sqrt(8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))
```

2

6

```

+ (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2)))) )

> AP2_192:=16-(HP_192)^2;

AP2_192 := 14 + 1/2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

- 1/4 (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))2

> AP_192:=sqrt(AP2_192);

AP_192 := 1/2 sqrt(56 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

- (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))2 )

> CP_192:=4-AP_192;

CP_192 := 4 - 1/2 sqrt(56 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

- (4 - sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))2 )

> HC2:=(CP_192)^2+(HP_192)^2;

HC2 := (4 - 1/2 sqrt(56 + 2 %1 - (4 - sqrt(8 + 2 %1))2 ))2 + 2

- 1/2 %1 + 1/4 (4 - sqrt(8 + 2 %1))2

%1 := sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

> HC:=sqrt(HC2);

HC := 1/2 sqrt(4 (4 - 1/2 sqrt(56 + 2 %1 - (4 - sqrt(8 + 2 %1))2 ))2

+ 8 - 2 %1 + (4 - sqrt(8 + 2 %1))2 )

```



```

%1 := sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))

> simplify(HC);

2 sqrt(8 - 2 sqrt(
      8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2))))))

> evalf(HC);

0.1308938543

> HC_Ceulen:=sqrt( 32-sqrt( 512+sqrt( 131072+sqrt( 8589934592
+sqrt(27670116110564327424)+sqrt(9223372036854775808) ) ) ) );

HC_Ceulen := 2 sqrt(
      8 - 2 sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(6) + 2 sqrt(2))))))

> simplify(HC_Ceulen);

2 sqrt(8 - 2 sqrt(
      8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(8 + 2 sqrt(2) sqrt(3) + 2 sqrt(2))))))

> evalf(HC_Ceulen);

0.1308938501

```

Referenties

- [1] Loon, P. van, 2002 *De probleemoplossers uit de Gouden Eeuw*. Ongepubliceerde afstudeerscripte onder begeleiding van H. Bos, Universiteit Utrecht.