

Wiskundig commentaar bij *Proefsteen* van Ludolph van Ceulen

Jantien G. Dopper

Augustus 2005

In *Proefsteen* valt Ludolph van Ceulen de rekenmeester Simon vander Eycke op een tweetal punten aan. In het eerste deel van het werk verwerpt hij de bewering van Simon vander Eycke dat de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en haar diameter gelijk is aan $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$. In het tweede deel van het werk levert Van Ceulen kritiek op de wijze waarop Vander Eycke interestberekeningen leert aan zijn leerlingen. In dit artikel zullen we enkel kijken naar de kritiek van Van Ceulen op de gevonden waarde voor wat we in moderne notatie π noemen.

Ludolph van Ceulen veronderstelt enige voorkennis bij “den ghenen die (..) mijn gheschrift met verstandt zullen connen lezen”. Zo gaat hij er onder meer vanuit dat begrippen als cirkel, diameter, middelpunt en een rechte hoek bij hen bekend zijn omdat zij dit “alvoeren in Euclide gheleert hebben”. Om het boekje dus goed te kunnen lezen moet de lezer kennis hebben van het werk van Euclides, en dan met name De Elementen. In *Proefsteen* verwijst Van Ceulen dan ook regelmatig naar proposities van Euclides. In dit artikel zal naar proposities die afkomstig zijn uit De Elementen worden verwezen als boek:propositie. Dat betekent dat I:47 betekent de 47e propositie uit het eerste boek van De Elementen.

Ludolph van Ceulens gaat er ook ervan uit dat de lezer bekend is met het feit dat de omtrek van een regelmatige veelhoek ingeschreven binnen een cirkel kleiner is dan die van de cirkel zelf en dat een regelmatige veelhoek de cirkel omschreven een grotere omtrek heeft dan de cirkel zelf. Voor het bewijs hiervan verwijst Van Ceulen naar zijn “voorgaende boecxken”, dat wil zeggen *Kort claer bewijs*.

De kritiek van Van Ceulen op de berekeningen van Vander Eycke kunnen in twee onderdelen verdeeld worden. Het eerste onderdeel bestaat uit de kritiek van Van Ceulen op de zesde propositie van Vander Eycke. Ludolph van Ceulen toont aan dat deze zesde propositie onjuist is. Het tweede onderdeel beslaat de verwerping van de bewering van $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$ als waarde voor de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel.

1 Ontkrachting van de zesde propositie van Simon vander Eycke

Simon vander Eycke formuleert zijn zesde propositie in *Claerder bevvys op de quadrat-vere des cirkels*. Omdat geen exemplaren van dit boekje bekend zijn, is de exacte formulering van de zesde propositie onbekend. Uit *Proefsteen* kunnen we echter wel reconstrueren wat de inhoud van deze zesde propositie geweest moet zijn. Zij luidt als volgt:

Zesde propositie van Simon vander Eycke

Zij gegeven een cirkel met straal AB en een loodlijn BG op AB (zie **figuur 1**). Vanuit A is een lijnstuk getrokken dat BG snijdt in punt F en de cirkel snijdt in

punt C met de afstand AC gelijk aan een kwart van de omtrek van een regelmatige veelhoek die een cirkel omschrijft. Dan geldt: $BF < AC$.

Ludolph van Ceulen wil de onjuistheid van deze propositie aantonen en hierbij maakt hij gebruik van de volgende propositie:

Propositie Ludolph van Ceulen

Gegeven zijn een cirkel met diameter AB en een lijn BK loodrecht op AB . Verder zijn twee lijnstukken gegeven die door het punt A gaan, de cirkel snijden in respectievelijk C en D en tenslotte lijn BK snijden in respectievelijk F en G (zie **figuur 2**). Dan heeft het lijnstuk wiens afstand vanaf het punt A tot het snijpunt met de cirkel het kleinst is, de grootste afstand vanaf het punt B tot het snijpunt met de lijn BK .

1.1 Het getallenvoorbeeld

Ludolph van Ceulen maakt deze propositie allereerst inzichtelijk aan de hand van een getallenvoorbeeld en daarna geeft hij een meetkundig bewijs. De gebruikte methode in het getallenvoorbeeld past hij later nogmaals toe om de onjuistheid van Vander Eyckes propositie aan te tonen. Laten we eerst eens kijken naar het getallenvoorbeeld. In **figuur 3** zien we een cirkel met een middelpunt I en diameter $AB = 8$, en een drietal lijnstukken die vertrekken vanaf punt A en de lijn BK snijden respectievelijk punt F , G en H . De lijn AF snijdt de cirkel in punt C met $AC = 4$, de lijn AG snijdt de cirkel in punt D met $AD = 5$ en de lijn AH snijdt de cirkel in punt H met $AE = 6$. Van Ceulen berekent de lengtes van BF , BG en BH en concludeert dan dat $BF > BG > BH$. Dit is in overeenstemming met de propositie. Ludolph van Ceulen beschrijft hoe AF berekent:

“...den winckel $A.C.B.$ (verstaet den winckel in den halven Circkel getykent met C) is winckelrecht door de 31. propositie des 3. boeckx Euclidis / daerom staet de perpendicularer in het midden der proportie van $A.C.$ ende $C.F.$ door de 8. proporsitie [sic] des 6. boeckx / $B.C.$ door $\sqrt{48}$ door den 47 des eersten boeckx Euclidis: het quadraet 48. gedevideert door 4. compt 12. voor $C.F.$ t'quadraet 144. gheaddeert tot den quadrate $B.C.$ als 48. compt 192 / dit is het quadraet van $BF.$ ende de lini is $\sqrt{192}$. Op den selve off veel ander manieren vinde ick $B.G.$ ende $B.H.$ ”

In moderne notatie komt de berekening van Van Ceulen op het volgende neer. Uit III:31, ook wel de stelling van Thales genoemd, volgt dat $\angle ACB$ recht is. Hierdoor kunnen we de Stelling van Pythagoras (I:47) toepassen om BC te berekenen: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{48}$. Het lijnstuk BC is een loodlijn van $\triangle ABF$ en uit VI:8 volgt dat $\triangle ABC$ en $\triangle BFC$ gelijkvormig zijn. Met behulp van gelijkzijdige driehoeken weten we dat $CB : AC$ als $CF : BC$. Met andere woorden:

$$CF = \frac{CB \cdot BC}{AC} = \frac{BC^2}{AC} = \frac{48}{4} = 12.$$

Vervolgens passen we weer de Stelling van Pythagoras toe, ditmaal in $\triangle BFC$. Dit levert

$$BF = \sqrt{CF^2 + BC^2} = \sqrt{144 + 48} = \sqrt{192}.$$

Met dezelfde methode kunnen BG en BH berekend worden. We vinden dan $BG = \sqrt{99\frac{21}{25}}$ en $BH = 49\frac{7}{9}$. Inderdaad, $BF > BG > BH$ zoals de propositie zegt.

1.2 Het meetkundig bewijs

Het getallenvoorbeeld is echter geen bewijs voor de propositie. Van Ceulen geeft ook een meetkundig bewijs. Dit bewijs luidt als volgt:

“Item $A.E.$ langher dan $A.D.$ ende $A.C.$ is ooghenschynlyck / ende warachtigh uut den 14. beschryvinghe ende 24. propositie des eersten boecx Euclidis. Item $A.C.$ ende $C.F.$ maken tsamen een rechte linie als $A.F.$ door de 14. des eersten desgelyckx $A.D.$ ende $D.G.$ et cet. Onderdesen allen is $A.F.$ de langste / door 18. ende 32. propositie des eersten boecx Euclidis dewyle het dan also moet $B.F.$ langher zyn dan $B.G.$ et cetra. door den 47. des eersten voors. boecx.”

In dit bewijs van Van Ceulen, zitten een aantal onduidelijkheden. Dit komt omdat hij verwijst naar proposities van Euclides zonder exact aan te geven hoe hij deze gebruikt. Hieronder zullen we proberen het bewijs van Van Ceulen te reconstrueren.

Dat $AE > AD > AC$ volgt uit het toepassen van I:24 op $\triangle AIC$, $\triangle AID$ en $\triangle AIE$. De 24^e propositie zegt namelijk dat als twee driehoeken twee zijden van gelijke lengte hebben, maar met een verschillende hoek tussen deze twee zijden, dat dan het derde lijnstuk in de driehoek met de grootste hoek langer is dan derde lijnstuk in de driehoek met de kleinste hoek. In $\triangle AIC$, $\triangle AID$ en $\triangle AIE$ zijn de zijden AI , IC , ID en IE allen even lang, namelijk de straal van de cirkel. Toepassing van de propositie leert nu dat $AE > AD > AC$.

Van Ceulen gebruikt dan I:14 om aan te tonen dat AC en CF op een rechte lijn liggen. Dit volgt ook uit de constructie die we gebruikt hebben om **figuur 2** te maken: C is namelijk hierin gedefiniëerd als het snijpunt van AF met de cirkel met $AC = 4$. In het bewijs dat Van Ceulen geeft, treedt nu een onduidelijkheid op. Dit komt omdat hij verwijst naar I:18 en I:32 zonder exact aan te geven hoe hij deze twee proposities gebruikt. Volgens Van Ceulen volgt het feit dat AF de langste is van de lijnstukken AF , AG en AH uit I:18 en I:32. Waarschijnlijk bedoelt Van Ceulen met de I:18 de propositie die tegenwoordig als I:19 is genummerd. I:18 zegt namelijk dat in een driehoek tegenover de langere zijde zich de grotere hoek bevindt. I:19 zegt precies het tegenovergestelde, dus dat in een driehoek tegenover de grotere hoek de langere zijde bevindt. Aangezien Van Ceulen wil laten zien dat de AF de langste zijde is van AF , AG en AH is het aannemelijker dat hij I:19 gebruikt heeft. Omdat Van Ceulen niet specificeert hoe hij de proposities gebruikt heeft, weten we niet precies hoe zijn bewijs eruit ziet. Een bewijs dat gebruik maakt van de I:19 en I:32 gaat als volgt:

Wegens VI:8 zijn $\triangle ACB$ en $\triangle ABF$ gelijkvormig. Alle hoeken in $\triangle ABF$ zijn dus bekend. Op dezelfde manier zijn $\triangle ADB$ en $\triangle ABG$ gelijkvormig en zijn dus de hoeken in $\triangle AGB$ bekend. Uit I:32 volgt dat

$$\angle AGF = \angle ABG + \angle GAB = 90^\circ + \angle GAB$$

en dat

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle ABG - \angle FAB = 90^\circ - \angle FAB.$$

Dus $\angle AGF > \angle AFB$. Dan volgt uit de I:19 dat $AF > AG$. Op dezelfde manier kan bewezen worden dat $AG > AH$ en dus geldt dat $AF > AG > AH$. Vervolgens kan eenvoudig met behulp van de Stelling van Pythagoras aangetoond worden dat $BF > BG > BH$. Er geldt namelijk:

$$BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} > \sqrt{AG^2 - AB^2} = BG > \sqrt{AH^2 - AB^2} = BH.$$

1.3 Ontkrachting propositie Simon vander Eycke

Ludolph van Ceulen gebruikt zijn propositie om te laten zien dat de zesde propositie van Simon vader Eycke niet klopt. Hiervoor kiest hij als regelmatige veelhoek die de cirkel omschrijft een regelmatige 192-hoek. Deze 192-hoek had Van Ceulen reeds in *Kort klaar bewijs* gebruikt. Daarin liet Van Ceulen zien dat met behulp van een omgescheven 192-hoek de omtrek van een cirkel benaderd kan worden. Voor een cirkel met diameter van $7\frac{99892}{100000}$ levert een omgeschreven 192-hoek dan een bovengrens van $25\frac{13664}{100000}$ voor de omtrek van de cirkel. Zonder verder berekeningen concludeert Van Ceulen dat dan een 192-hoek die een cirkel met diameter 8 omschrijft, een bovengrens van $25\frac{14004}{100000}$ levert. Een kwart van deze omtrek is gelijk aan $6\frac{28501}{100000}$ en dit stuk voegt Van Ceulen in de cirkel. Voor de afstanden in **figuur 1** geldt dus dat de diameter $AB = 8$ en het lijnstuk $AC = 6\frac{28501}{100000}$. Voor het berekenen van BF gebruikt Van Ceulen dan dezelfde rekenmethode als in het getallenvoorbeeld van de propositie.

Uit de Stelling van Pythagoras volgt dat $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{64 - \left(6\frac{28501}{100000}\right)^2}$. Nu zijn $\triangle ABC$ en $\triangle BFC$ gelijkvormig en dus volgt dat $CF = \frac{BC \cdot BC}{AC} = \frac{BC^2}{AC}$. Toepassen van de Stelling van Pythagoras in $\triangle BFC$ levert dan

$$\begin{aligned} BF &= \sqrt{CF^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{BC^2}{AC}\right)^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{\frac{BC^4}{AC^2} + BC^2} \\ &= \sqrt{\frac{\left(64 - \left(6\frac{28501}{100000}\right)^2\right)^2}{\left(6\frac{28501}{100000}\right)^2} + 64 - \left(6\frac{28501}{100000}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{15679135551936}{395013507001}} \\ &> 6\frac{30019}{100000} \end{aligned}$$

Omdat

$$BF > 6\frac{30019}{100000} > 6\frac{28501}{100000} = AC$$

is de bewering van Simon vander Eycke onjuist.

2 Ontkrachting van $\pi = \sqrt{\sqrt{5120} - 32}$

Ludolph van Ceulen laat op twee manieren zien dat $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$ niet de exacte verhouding is tussen de omtrek van een cirkel en haar diameter. De eerste methode borduurt voort op de resultaten van het bewijs dat de zesde propositie van Vander Eycke onjuist is. Voor een cirkel met straal 4 geldt (in moderne notatie) dat $2\pi = \frac{\text{omtrek cirkel}}{4}$. Omdat $6\frac{28501}{100000}$ reeds groter is dan de ware omtrek van een kwart cirkel volgt dat

$$\frac{\text{omtrek cirkel}}{4} < 6\frac{28501}{100000} < 6\frac{28921}{100000} < \sqrt{\sqrt{5120} - 32}.$$

Daarom kan $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$ niet de juiste verhouding zijn.

Ludolph van Ceulen geeft ook nog een tweede argument voor de onjuistheid van $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$. Van Ceulen geeft echter niet alle berekeningen, maar slechts de belangrijkste gedachtengangen. Hiervoor geeft hij verantwoording af aan de lezer:

”Alhier hadde ic voor my ghenomen de gheheele operatie te tellen (...) maer ouermits het boecxken met de oncosten te groot soude vallen / heb ick alleene de ghetalen gheset / versekert / zijnde / dat alle inder const hervaren ondersoeckers d’zelve voor goet zullen bevinden.”

Van Ceulen had dus graag de gehele berekeningen in het werk opgenomen, maar daarmee zou het boekje te omvangrijk en dus te duur worden. Vandaar dat hij ervan heeft afgezien, in het vertrouwen dat mensen die in de wiskunde onderlegd zijn, zijn redering kunnen volgen.

Eerst leidt Van Ceulen een ondergrens af voor de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Hiervoor gebruikt het een resultaat uit *Kort klaar bewijs*, namelijk dat de de lengte van zijde van een 96-hoek die ingeschreven is in een cirkel met straal 8, gelijk is aan

$$\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944 + \sqrt{2147483648}}}}}$$

Nu geldt er voor deze zijde van de 96-hoek dat:

$$\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944 + \sqrt{2147483648}}}}} > \frac{2617525}{10000000}.$$

Door deze ondergrens met 96 te vermenigvuldigen kunnen we de omtrek van de cirkel afschatten: $96 \cdot \frac{2617525}{10000000} = 25 \frac{1282400}{10000000}$. Deling door 8 geeft dan de verhouding tussen de omtrek en de diameter. Deze verhouding is dan $3 \frac{1410300}{10000000}$ en omdat we een ondergrens hebben genomen, moet de werkelijke verhouding dus groter zijn. Omdat $3 \frac{1410300}{10000000} > 3 \frac{10}{71}$, moet ook gelden dat de ware verhouding groter is dan $3 \frac{10}{71}$.

Vervolgens leidt Van Ceulen een bovengrens af voor de verhouding tussen de diameter en de omtrek van een cirkel. Dit doet hij aan de hand van een omgeschreven 96-hoek (zie **figuur 4**). De boog HPC is een 96^e deel van een cirkel met straal $AP = 4$. Het lijnstuk HC is de zijde van een ingeschreven 96-hoek van de cirkel met middelpunt A en straal 4. Tegelijkertijd is lijnstuk HC ook een zijde van een omgeschreven 96 hoek van de cirkel met middelpunt A en onbekende straal AM . We kunnen de straal AM met behulp van de Stelling van Pythagoras als volgt bepalen:

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{HA^2 - HM^2} \\ &= \sqrt{16 - \left(\frac{1}{2}HC\right)^2} \\ &= \sqrt{16 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944 + \sqrt{2147483648}}}}}\right)^2} \end{aligned}$$

De verhouding tussen een zijde van de omgeschreven 96-hoek en de diameter van de cirkel is dan

$$\frac{HC}{2AM} = \frac{\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}}}}{2AM}.$$

Deze verhouding schat Ludolph van Ceulen als volgt naar boven af: $\frac{HC}{2 \cdot AM} < \frac{2617527}{79957166} = \frac{327367}{10000000}$. Vermenigvuldigen met 96 levert dan de bovengrens voor de verhouding tussen de omtrek en de diameter: $96 \cdot \frac{327367}{10000000} = 3 \frac{1427232}{10000000} < 3 \frac{1}{7}$. Het combineren van de onder- en bovengrens levert dan (in moderne notatie):

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Dit is de afschatting van π die reeds door Archimedes was gevonden. Omdat voor waarde van Simon vander Eycke geldt dat deze buiten het interval $(3 \frac{10}{71}, 3 \frac{1}{7})$ valt, concludeert Ludolph van Ceulen andermaal dat de waarde van Simon vander Eycke onjuist moet zijn.

Tenslotte formuleert van Ceulen een laatste propositie. Hierin verklaart hij dat

$$3 \frac{141557587}{1000000000} < \pi < 3 \frac{141662746}{1000000000}.$$

Van Ceulen vertelt de lezer niet hoe hij tot deze begrenzing is gekomen. Vermoedelijk is hij doorgegaan met het verdubbelen van het aantal zijden van de veelhoek en leverde de 384-hoek het gewenste resultaat.

3 Drukfouten

In *Proefsteen* komen een tweetal drukfouten voor in de berekeningen voor.

Op pagina 6 staat: $\sqrt{\cdot \frac{15679135551936}{395013507001}}$ en dit moet zijn: $\sqrt{\frac{15679135551936}{395013507001}}$. Met $\sqrt{\cdot}$ duidt Van Ceulen een wortel binnen een wortel aan. Van Ceulen noteert bijvoorbeeld $\sqrt{\sqrt{5120} - 32}$ als $\sqrt{\cdot} \sqrt{5120} - 32$.

Op pagina 8 staat een breuk met dezelfde teller als noemer:

$$\frac{\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}}}}{\sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}}}}.$$

Dit moet zijn:

$$2 \sqrt{16 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{32 - \sqrt{152 + \sqrt{131072 + \sqrt{6442450944} + \sqrt{2147483648}}} \right)^2}.$$

4 Verantwoording

Voor dit commentaar is gebruik gemaakt van het exemplaar dat aanwezig is in de Universiteitsbibliotheek Leiden met de plaatsingscode UBL [614 G 10] van Ludolph van Ceulen, *Proefsteen ende claerder wederleggingh dat het claerder bewijs (so dat ghenaept is) op de gheroemde ervindingh vande quadrature des circkels een*

onrecht te kennen gheven, ende gheen waerachtich bewijs is : hier by gevoeght Een corte verclaringh aengaende het onverstant ende misbruyck inde reductie op simpel interest ..., Amsterdam, “Gheprent tot Aemstelredam : by my Harmen Janszoon Muller”, 1586.

Proefsteen is ook opgenomen in de tweede uitgave van *Vanden Circkel* uit 1615. In deze versie ontbreekt echter het voorwoord aan de lezer. De versie uit 1615 is niet geraadpleegd bij het maken van dit commentaar.